QUOI DE NEUF DANS LA NUMÉRATION AU CP ?

Eric MOUNIER
Formateur IUFM, IUFM CRÉTEIL, UPEC (PARIS 12)
Laboratoire de Didactique André Revuz, LDAR
eric.mounier@u-pec.fr

Nathalie PFAFF
Formateur IUFM, IUFM CRÉTEIL, UPEC (PARIS 12)
Laboratoire de Didactique André Revuz, LDAR
nathalie.pfaff@u-pec.fr

Résumé

Les élèves doivent résoudre au CP des problèmes qui mettent en jeu les nombres. Certaines procédures sont susceptibles de faire écho à des propriétés relatives à la numération écrite chiffrée, d'autres à la numération orale. On pourrait penser qu'il y a une certaine perméabilité entre ces deux numérations, mais la thèse d'Eric Mounier (2010) indique que les mathématiques sous-jacentes diffèrent plus sensiblement que des travaux antérieurs pouvaient le laisser penser. Cette analyse a été faite en considérant les signes des numérations et a permis d'établir des interprétations théoriques. Elle constitue un outil pour comprendre les procédures des élèves. C'est cet outil qui a été testé dans l'atelier. Grâce à des vidéos d'élèves, il a été possible de relier les procédures à des propriétés de telle ou telle interprétation théorique des numérations. Ceci conduit à poser un nouveau regard sur les questions afférentes à la place de la numération parlée dans l'apprentissage des aspects positionnels de la numération écrite chiffrée.

L'atelier s'est déroulé en trois temps : une présentation d'une problématique concernant la numération au CP et menant à deux questions (à l'initiative des auteurs de l'atelier), une analyse de vidéos d'élèves (effectuée par les participants de l'atelier) afin de fournir des éléments de réponse à ces deux questions et enfin une nouvelle orientation du questionnement (proposée par les auteurs de l'atelier) qui a été support à des débats.

Dans ce compte rendu, nous reprenons ce déroulement de manière chronologique.

I - DES QUESTIONS SUR LA NUMERATIONS AU CP

L'ensemble de cette première partie reprend la présentation faite dans l'atelier par ses auteurs, y compris les questions qui y sont étudiées. Des précisions sont consultables dans la thèse d'Eric Mounier (2010).

1 Des questions initiales

Les élèves utilisent différentes procédures pour résoudre des problèmes mettant en jeu l'écriture chiffrée du nombre. Les aspects positionnels de cette écriture sont objet d'enseignement au CP. Prenons en exemple la tâche consistant à indiquer le cardinal d'une collection d'objets figurés sur une feuille par son écriture chiffrée. Plusieurs procédures peuvent être utilisées par les élèves. En voici deux qui mènent à une réponse exacte (on prend l'exemple de 42) :

- un comptage de paquets de dix formés au fur et à mesure puis d'unités restantes : « dix, vingt, trente, quarante, quarante-et-un, quarante-deux » suivi de la transcription de la désignation orale obtenue en l'écriture chiffrée « 42 ».

- l'organisation complète de la collection en paquets de dix (de manière maximale) et ensuite l'écriture du nombre de dizaines par le chiffre « 4 » puis du nombre d'unités par le chiffre « 2 » qui est écrit à la droite de « 4 ».

Au-delà des procédures d'énumération, Briand (1999), une première analyse permet d'inférer des liens entre les deux numérations. La première procédure utilise une « double » structuration de la comptine numérique, celle des dizaines (les mots, « dix », « vingt », « trente », « quarante ».), celle des unités (les mots, « un », « deux »). Le dénombrement y est effectué au fur et à mesure. Ensuite est utilisée une traduction de la désignation parlée « quarante-deux » en l'écriture chiffrée « 42 ». La deuxième procédure utilise la comptine numérique jusqu'à dix pour organiser la collection en différents paquets de dix. Une fois l'organisation faite, il s'agit alors de la coder par écrit : le nombre de dizaines ainsi que celui d'unités étant indiqués par un chiffre de graphie conventionnelle (les chiffres de « 0 » à « 9 »), la disposition spatiale de ces chiffres étant aussi conventionnelle (ici en ligne avec un ordre).

La question est alors de savoir reconnaître dans les procédures observées en quoi les mathématiques à l'œuvre sont liées à la numération écrite dans son aspect positionnel.

2 Une analyse des numérations en jeu au CP

L'analyse qui suit est une manière de répondre à la question concernant le lien entre les mathématiques et chacune des numérations. Celle-ci est extraite de la thèse d'Eric Mounier (2010). Elle a été présentée au début de l'atelier.

Tableau 1: les interprétations

	Principes mathématiques	Mise en signes
Ecriture chiffrée	4x10+2	42
Arithmétique multiplicative	Quatre fois dix plus deux	Quatre dix deux
Arithmétique additive	Quarante plus deux	Quarante deux
Ordinale avec repérants	Deux après quarante	Quarante deux
Ordinale sans repérant	Quarante-deux ième	Quarantedeux

Ce premier tableau donne, à partir de l'exemple du nombre désigné par quarante-deux/42, les différentes interprétations issues d'une analyse à partir des signes. La première ligne concerne l'écriture chiffrée, les quatre suivantes la numération parlée de type indo-européen (français, allemand, italien, espagnol, anglais, latin …). Ce sont des modèles théoriques qui distinguent les principes mathématiques et leur mise en signes. Si on considère l'ensemble des modèles mathématiques que permettent les décompositions $\sum a_i d_i$ selon les échelles de numération d_i , seul le modèle indiqué dans la première ligne convient pour l'écriture chiffrée. Ainsi, la décomposition dite polynomiale d'un nombre constitue les fondements mathématiques de cette dernière. Les autres modèles (indiqués dans les quatre lignes suivantes) peuvent servir à modéliser la numération parlée en France. Ils ont été obtenus à l'aide d'une analyse linguistique. Le modèle arithmétique multiplicatif (de la numération parlée) emprunte des principes mathématiques identiques à la numération écrite chiffrée, mais obtenus par une méthodologie d'analyse différente (une analyse linguistique). Le modèle arithmétique additif se distingue du modèle multiplicatif du fait par exemple de voir dans « trente » non pas « dix plus dix plus dix » (trois fois dix) mais « vingt plus dix » (on rajoute dix au dernier appui additif obtenu, ici « vingt »). Il se distingue du modèle ordinal avec repérants du fait que dans ce dernier « trente » est atteint après avoir énoncé les mots de la comptine numérique « un, deux, …, huit, neuf » après le dernier repérant prononcé « vingt ».

Tableau 2 : les comparaisons

	Principes mathématiques			Mise en signes
Ecriture chiffrée	dix	arithmétique	polynômiale	Coefficients
Arithmétique multiplicative	dix	arithmétique	polynômiale	Ordre et coefficients
Arithmétique additive	dix+dix vingt+dix trente …	arithmétique		Appuis et appuyants additifs
Ordinale avec repérants	Dix, vingt, trente …			Repérants et comptants
Ordinale sans repérant				Succession de noms

Ce tableau permet de comparer chacun des quatre modèles possibles pour la numération parlée en France avec l'interprétation de l'écriture chiffrée (qualifiée de référence et indiquée dans la première ligne), suivant les principes mathématiques puis leur mise en signes.

La graphie des chiffres et la disposition linéaire pour l'écriture chiffrée, le choix des phonèmes et de l'ordre d'énonciation des différents mots composant le nom des nombres pour la numération parlée en France (par exemple quarante/deux, au lieu de deux/quarante) sont des éléments conventionnels du point de vue des mathématiques. Ces derniers peuvent être compris comme des choix culturels ou pragmatiques qui peuvent être reliés à des contraintes dues à la forme orale (contraintes linguistiques) ou écrite de la numération. Cependant certains éléments de la mise en signes sont directement reliés aux principes mathématiques. C'est le cas de l'utilisation des coefficients de la décomposition dite polynomiale pour l'écriture chiffrée ou de la composition des noms de certains nombres pour la numération parlée. Le modèle arithmétique multiplicatif (de la numération parlée en France) est le modèle le plus proche de l'interprétation de référence (modèle adopté pour l'écriture chiffrée) puisque les principes mathématiques sont les mêmes. Seule la mise en signes diffère, puisqu'en particulier l'une n'utilise que les coefficients de la décomposition dite polynomiale tandis que l'autre utilise les coefficients et les ordres. Le nombre « dix » a un statut à part : son emploi est attesté dans la majorité des modèles sans qu'il soit mathématiquement nécessaire (ni comme choix de base, ni comme appui arithmétique ou repérant).

Tableau 3 : pertinence suivant les nombres

	Principes mathématiques			Mise en signes
Ecriture chiffrée	dix	arithmétique	polynômiale	Pour les entiers naturels
Arithmétique multiplicative	dix	arithmétique	polynômiale	Pour n>cent (mille)
Arithmétique additive	dix+dix vingt+dix trente …	arithmétique		Pour seize<n<cent
Ordinale avec repérants	Dix, vingt, trente …			Pour seize<n<cent
Ordinale sans repérant				Pour n<dix-sept

Ce tableau présente finalement la « pertinence » de l'interprétation (ie : le choix d'un modèle) suivant le champ numérique. Il permet en particulier de comparer chacune des interprétations de la numération parlée en France avec l'interprétation de référence de la numération écrite chiffrée.

En ce qui concerne la numération parlée en France, cette pertinence est évaluée selon le degré d'analyse qui permet de retrouver le modèle. Ainsi elle prend en compte la distance entre « quarante-deux » et « quatre dix deux » et celle entre « deussan » et « deux cents » (« deussan » indiquant qu'il est analysé comme un repérant ou appuis additif, « deux cents » soulignant l'appui multiplicatif – l'ordre/puissance de dix - « cent »). Pour les nombres inférieurs à cent, on n'entend pas l'appui multiplicatif (« dix ») alors qu'il est présent (« cent ») pour les nombres entre cent et mille. Pour les nombres inférieurs à cent (et strictement supérieurs à seize), on entend les appuis additifs vingt, trente, etc., qui sont aussi les repérants si on utilise l'interprétation ordinale avec repérants. Ces remarques sont traduites dans la colonne de droite du tableau ci-dessus. Cette présentation met l'accent sur les différences entre les modèles, au-delà des « irrégularités » propres au français de France, en particulier pour les nombres entre soixante et cent (l'utilisation d'une comptine numérique jusqu'à « dix-neuf » ou, dans une perspective arithmétique, d'un ajout de vingt). Pour les nombres inférieurs à cent (ceux du CP), ce n'est donc pas l'interprétation multiplicative qui est la plus pertinente pour la numération parlée en France, alors que cette interprétation est la plus proche de l'interprétation de référence de l'écriture chiffrée.

3 Les questions que les auteurs de l'atelier proposent d'étudier

3.1 De l'analyse des mathématiques en jeu à l'analyse des procédures des élèves

L'étude précédente est une réponse à la question concernant les liens entre les mathématiques et les numérations, et par voie de conséquence entre les deux numérations en jeu au CP, écrite chiffrée et orale. Mais comment relier les mathématiques et les procédures des élèves ? Dans l'atelier on fait l'hypothèse, couramment admise en didactique, que les mathématiques à l'œuvre peuvent être relevées en analysant l'activité des élèves. De manière plus précise, on peut se référer à la théorie des champs conceptuels, Vergnaud (1991). Pour résoudre un problème, les élèves utilisent des schèmes dans lesquels les théorèmes et concepts peuvent être validés grâce à des propriétés mathématiques. Certains emplois sont « -en-acte » dans la mesure où la propriété utilisée n'est pas explicite pour l'élève. Par exemple lorsqu'un comptage de un en un est considéré comme menant à la même réponse qu'un comptage de dix en dix, un comptage des dizaines ou encore un calcul mental. En CP ce sont surtout des théorèmes-en-acte qui sont à l'œuvre car le niveau de connaissance des élèves permet difficilement de formuler des propriétés.

3.2 Des questions spécifiques à la numération au CP

Il s'agit d'aborder les liens entre les propriétés des différentes interprétations et les procédures des élèves. Ces derniers abordent au CP une certaine variété de problèmes. Fénichel et Pfaff (2004, 2005) proposent un classement de ces problèmes dans le cadre de la théorie des champs conceptuels (voir aussi la thèse de Nathalie Pfaff). Ce classement se base sur les relations entre les signifiants, par exemple dire une écriture chiffrée ou transcrire une désignation parlée à l'aide de chiffres, et les liens entre le signifié (le nombre) et un signifiant, par exemple indiquer la désignation parlée du cardinal d'une collection d'objets. Ainsi l'exemple précédent, indiquer le cardinal d'une collection (d'objets figurés sur une feuille) par son écriture chiffrée, est à situer dans les problèmes consistant à donner un signifiant (ici l'écriture chiffrée) du nombre (signifié).

A la maternelle, l'écriture des nombres avec des chiffres a été introduite en tant que version écrite des désignations de la numération parlée en France : l'écriture (chiffrée) « 23 » est synonyme de l'écriture (littérale) « vingt-trois ». L'apprentissage nouveau au CP concerne les propriétés liées à l'aspect positionnel des écritures chiffrées. Dans l'exemple donné au début, la deuxième procédure consiste en l'organisation complète de la collection en paquets de dix (de manière maximale) puis de l'écriture du nombre de dizaines par le chiffre « 4 » et du nombre d'unités par le chiffre « 2 » à la droite de « 4 ». Au regard de l'étude des signes des numérations indiquée précédemment, cette procédure peut être analysée comme mettant en jeu des propriétés relatives à l'interprétation de référence de la numération écrite chiffrée. Ce n'est pas le cas de la première procédure. Pourtant l'une et l'autre mènent à une réponse exacte. L'atelier s'est proposé d'aborder deux questions :

- Quelle est l'influence des tâches sur la nature des mathématiques en jeu, selon qu'elles relèvent de telle ou telle interprétation ?

- Y a-t-il des élèves qui usent systématiquement de procédures analysables comme relevant de telle ou telle interprétation ?

Dans l'atelier les élèves concernés sont ceux de fin de CP, c'est-à-dire ayant reçu un enseignement sur les aspects positionnels de la numération écrite chiffrée.

II - LE DISPOSITIF DE L'ATELIER

Le but de l'atelier est de donner dans le cadre d'analyse proposé un aperçu qualitatif des réponses que l'on peut donner aux questions précédentes. <u>Il se centre sur des tâches ne requérant pas nécessairement l'emploi de la numération parlée</u> (si ce n'est pour un comptage jusqu'à dix) <u>afin de comprendre son rôle dans les procédures d'élèves qui utilisent les écritures chiffrées</u>.

Sa faisabilité repose sur l'hypothèse (à tester) qu'il est possible d'inférer des procédures des élèves les éléments qui ont caractérisé les différentes interprétations des numérations.

1 Le choix des observations

Comme il s'agit essentiellement d'une étude prospective, qui pourrait permettre d'entreprendre une étude descriptive plus complète, seule l'activité de trois élèves sur quatre tâches a été étudiée.

Limiter les paramètres influant sur l'usage de telle ou telle procédure

Afin de répondre aux deux questions posées, un certain nombre d'éléments doivent être pris en compte concernant la nature des tâches proposées aux élèves et les contextes dans lesquels elles ont été proposées. Voici les éléments retenus par les auteurs de l'atelier :

- Des tâches comprises par les élèves (habillage et contexte familier).

- Des tâches « simples et isolées », au sens d'Aline Robert (2008), afin de pouvoir repérer les propriétés en jeu sans que des étapes intermédiaires empêchent les élèves de s'y être confrontés.

- Des tâches impliquant la numération « en unités », Chambris (2008), c'est-à-dire qui requièrent un emploi du concept d'unité et de dizaine (comme unité d'un ordre supérieur), mais aussi un choix de tâches pour lesquelles il n'est pas nécessaire d'avoir recours à la numération parlée usuelle. Les deux premières tâches consistent à donner un signifiant du nombre (quantité) : une écriture chiffrée pour la première, une désignation en unités et dizaines pour la seconde. Les deux autres tâches concernent le lien entre ces deux signifiants (des précisions sont données dans la suite de l'article).

- Des vidéos d'élèves de fin de CP (mois de juin) issus de la même classe et ayant suivi un manuel scolaire afin de limiter des effets dus à un enseignement différent. Tous les élèves savent dire les écritures chiffrées des nombres jusqu'à cent et retranscrire les désignations orales par une écriture chiffrée. Une erreur est cependant à relever pour la première élève, Nadjma, concernant la correspondance entre la désignation écrite chiffrée et la désignation orale des nombres de la dizaine des soixante-dix (associée à une écriture chiffrée commençant par un « 6 » au lieu d'un « 7 »).

Dans les extraits proposés à l'analyse, le champ numérique est constitué des nombres de treize à quatre-vingt-onze, mais il n'est pas le même pour toutes les tâches, ni même parfois pour tous les élèves (cf. la tâche 4). Ce choix est contraint par les observations effectivement recueillies mais aussi par la durée de l'atelier.

Les éléments recueillis, les tâches des élèves et le contexte de passation

Les participants de l'atelier disposaient de vidéos de trois élèves et des photocopies de leur production. Ces vidéos ont été réalisées la même matinée. Dans chaque cas l'élève était seul à une table au fond de la classe (qui continuait à fonctionner comme d'habitude). Le chercheur leur proposait différentes tâches. Les quatre tâches étudiées sont extraites d'une série plus importante. Le contexte est celui des séances « Grand Ziglotron » de la collection « Cap Maths » (édition Hatier 2005), séances que les élèves ont suivies pendant l'année. La séquence du manuel comporte quatre séances qui ont toutes le même contexte. Il s'agit de faire une commande d'une certaine quantité de « boutons » figurés par des carrés sur une fiche « Ziglotron », ce dernier étant un robot d'une histoire racontée aux élèves. Cette commande permet de réparer des Ziglotrons. La commande se fait via un bon à remplir : il s'agit d'inscrire un nombre de dizaines de boutons et un nombre de boutons isolés (« tout seuls ») limité à neuf par commande. Ce contexte est repris dans les tâches 2, 3, 4 analysées dans l'atelier. Le bon de commande est constitué d'une première ligne dans laquelle est demandé le nombre de boutons « tout seuls » et d'une deuxième dans laquelle est demandé un nombre d'enveloppes de dix. Ces enveloppes ont été constituées auparavant avec les élèves. Ils ont pu vérifier que toutes contenaient dix boutons (qu'ils ont pu compter) : « une dizaine » a été écrit sur chaque enveloppe avec l'accord et l'aide des élèves.

<u>Tâche 1</u> : Indiquer par une écriture chiffrée le cardinal d'une collection non manipulable.

Quarante-trois petits ronds sont dessinés sur une feuille A4, sans organisation particulière. Les élèves ont un crayon à papier et une gomme. On leur demande d'inscrire au bas de la feuille l'écriture chiffrée du nombre de petits ronds.

<u>Tâche 2</u> : Indiquer par une dénomination en dizaines et unités le cardinal d'une collection non manipulable.

Les élèves ont devant eux, dessiné sur une feuille A4, un « Ziglotron » qui comporte treize boutons à réparer (c'est donc une collection non manipulable de treize petits carrés figurés). Ils ont un crayon à papier et une gomme. Ils doivent remplir le bon de commande, c'est-à-dire indiquer le nombre d'enveloppes et le nombre de boutons « tout seuls », sachant qu'il n'est pas possible de demander plus de neuf boutons « tout seuls ».

<u>Tâche 3</u> : Indiquer par une écriture chiffrée le cardinal d'une collection donnée sous la forme de dizaines et d'unités.

Les élèves ont huit enveloppes « une dizaine » et six boutons isolés (boutons « tout seuls »). Sur un petit morceau de papier il leur est demandé d'inscrire l'écriture chiffrée du nombre total de boutons.

<u>Tâche 4</u> : Donner une quantité sous forme de dizaines et d'unités, quantité indiquée sous la forme d'une écriture chiffrée.

Il est présenté aux élèves successivement les écritures chiffrées suivantes : 13, 27, 42, 58, 91. On leur demande à chaque fois de donner le nombre d'enveloppes et de boutons « tout seuls » pour honorer la commande.

2 Bilan des procédures relevées selon les élèves et les tâches

La grille qui suit permet une double lecture :

- horizontale, pour donner des éléments de réponse à la première question « Quelle est l'influence des tâches sur la nature des mathématiques en jeu, selon qu'elles relèvent de telle ou telle interprétation ? »

- verticale, pour la seconde question « Y a-t-il des élèves qui usent systématiquement de procédures analysables comme relevant de telle ou telle interprétation ? ».

	Nadjma	Sofiane	Thomas
Tâche 1 Indiquer par une écriture chiffrée le cardinal d'une collection non manipulable.	L'élève compte un à un les éléments de la collection en les numérotant successivement avec des écritures chiffrées. Le dernier nombre est dit et écrit (écriture chiffrée « 43 ») en même temps sur le dernier élément énuméré. Il est reporté en bas de la feuille. La procédure est réussie via une double erreur d'énumération : oubli d'un objet et oubli d'un numéro dans la comptine des écritures chiffrées (= la comptine parlée qui est notée à l'écrit)	Trois groupes de dix sont entourés, puis l'élève écrit « 43 ». Quand on lui demande comment il le sait, il dit qu'il a entouré des dizaines, il y en a trois. Ensuite il a compté un par un les éléments restants « j'ai pu compter plutôt qu'entourer ». Puis il dit « j'ai mis treize avec trente pour faire quarante, treize c'est trois unités, donc j'ai mis le trois (en montrant le « 3 » de « 43 ») ».	La collection est organisée en groupements (tous de dix) et de manière maximale (les objets sont numérotés de « 1 » à « 10 »). Ensuite l'élève inscrit « 42 ». Quand on lui demande comment il le sait, il indique : « dix plus dix ça fait vingt, trente, quarante, et là deux ça fait quarante-deux». L'oral « quarante-deux » est transcrit directement par l'écriture chiffrée « 42 » au bas de la feuille. La procédure a échoué car un des trois éléments restant n'a pas été pris en compte.
Tâche 2 Indiquer par une dénomination en dizaines et unités (bon de commande) le cardinal d'une collection non	L'élève compte un à un les éléments de la collection puis inscrit 13 (et dit « treize ») sur le bon sur la ligne réservée aux boutons « tout seuls ». Quand on lui rappelle qu'on ne peut pas donner plus de neuf boutons, il inscrit « dix » (puis « 10 » quand on lui demande d'écrire avec des	L'élève numérote les éléments de la collection de 1 à 13 puis inscrit 13 sur le bon (devant un bouton). Quand on lui rappelle qu'il n'a a pas plus de 9 boutons, il regarde l'écriture « 13 » et à partir de cette écriture dit « une dizaine et trois unités ». Il écrit alors la bonne réponse 3 « tout seuls » et 1 enveloppe « une dizaine »	L'élève numérote les éléments de la collection de 1 à 13 puis inscrit « 3 » sur le bon (devant un bouton) et « 10 » pour le nombre d'enveloppes. Il dit ensuite que cela ne convient pas mais ne sait pas comment faire

manipulable.	chiffres) pour le nombre d'enveloppes, sans effacer le « 13 ».		pour répondre correctement.

	Nadjma	Sofiane	Thomas
Tâche 3 Indiquer par une écriture chiffrée le cardinal d'une collection donnée sous la forme de dizaines et d'unités.	L'élève compte les enveloppes une par une, inscrit « 8 », puis compte les boutons « tout seuls » un par un et inscrit « 6 » à côté du « 8 » pour obtenir la réponse exacte « 86 ».	L'élève énonce « dix, vingt, trente, …, quatre-vingts » puis compte les boutons «tout seuls ». Et dit « quatre-vingt-six ». Il écrit alors la réponse exacte « 86 ».	L'élève compte huit enveloppes (il dit « huit ») et six boutons « tout seuls ». Il dit alors la bonne réponse « quatre-vingt-six » puis l'écrit « 86 ». Quand on lui demande des explications, il indique avoir transformé huit enveloppes en « huit dizaines » puis en « quatre-vingts ». Il dit ensuite : « avec ces six boutons, ça fait « quatre-vingt-six ».
Tâche 4 Exprimer une quantité sous forme de dizaine(s) et d'unité(s), cette quantité étant indiquée par une écriture chiffrée.	Pour 13, l'élève donne les éléments exacts : trois boutons « tout seuls » et une enveloppe, mais indique donner quatre enveloppes. Pour 27, l'élève inverse les éléments à donner : deux boutons « tout seuls » et sept enveloppes. Les autres nombres n'ont pas été testés.	Pour tous les nombres proposés, 13, 27, 42, 58, 91, les réponses sont exactes. L'élève va très vite et ne parle pas. Quand on lui demande des explications, pour « 58 », il indique relier « cinquante » à « cinq dizaines » et pour « 91 » il dit (directement) « neuf dizaines et un bouton » en pointant les deux chiffres.	Pour tous les nombres proposés, 13, 27, 42, 58, 91, les réponses sont exactes. L'élève va très vite et ne parle pas.

III - LES APPORTS DE L'ATELIER

1 Analyse interprétative des résultats constatés

L'analyse présentée ici est une synthèse de celle entreprise par les participants de l'atelier. Elle a fait consensus ou tout au moins été largement partagée. Les points qui ont été source de discussion sont relatés dans les paragraphes III. 3 et IV. Elle utilise l'étude de la numération qui a été présentée dans le paragraphe I. On a relevé dans des tâches qui ne la nécessitent pas *a priori* la mise en jeu de propriétés relatives à la numération parlée. On a relevé aussi les propriétés afférentes à la numération écrite chiffrée.

1.1 Par tâche

Les nombres en jeu sont susceptibles d'influencer les procédures au moins autant que la nature de la tâche elle-même. Cependant, dans ce qui a été observé, pour chacune des tâches on peut inférer des procédures des propriétés de différentes interprétations.

Dans la tâche 1, les procédures font échos aux propriétés d'une interprétation ordinale sans repérant (Nadjma) ou d'une interprétation ordinale avec repérants ou arithmétique additive (Thomas et Sofiane). Il n'est pas aisé de distinguer ces deux dernières. Cependant, bien qu'ils ne soient pas encore très familiers de tous les problèmes de la structure additive, il semble que Thomas et Sofiane conçoivent des réunions de collections et utilisent les appuis additifs dix, vingt, trente, quarante.

Dans la tâche 2, c'est l'interprétation ordinale qui est toujours est en jeu, ce qui peut être relié au champ numérique spécifique dont fait partie le nombre « 13 ». Comme tous les élèves ont compté le nombre d'objets, la tâche a donc finalement consisté à relier deux signifiants, la désignation parlée et celle « en unités et dizaines ». Un des élèves (Sofiane) a réussi à donner la bonne réponse en utilisant alors l'écriture chiffrée comme relais, sans que l'on puisse affirmer qu'il ait utilisé l'aspect positionnel. Les autres ont échoué.

Dans la tâche 3, deux élèves sollicitent la numération parlée en France : Sofiane utilise des propriétés d'une interprétation ordinale avec repérants (ou additive ?), Thomas celles d'une interprétation multiplicative. Nadjma fait directement le lien entre l'écriture chiffrée et une désignation « en unités et dizaines ».

Dans la tâche 4, réciproque de la précédente, ce dernier lien semble utilisé préférentiellement par les trois élèves et ceci de manière plus probante pour les grands nombres, si on considère leur rapidité d'exécution et la fiabilité de leur réponse. Cette tâche semble donc moins solliciter des propriétés des interprétations de la numération parlée puisque les élèves utilisent un lien direct, des chiffres de l'écriture chiffrée vers la désignation « en unités et dizaines ». Cependant, contrairement à la précédente, l'écriture chiffrée est donnée. Sa lecture permet à la quantité d'être immédiatement désignée par un nom de la numération parlée. Est-ce que cela pourrait contribuer à comprendre les différences remarquées entre les procédures de ces deux dernières tâches, réciproques l'une de l'autre ?

Ce n'est que dans la tâche 1, un dénombrement « classique », que l'écriture chiffrée est pour tous les élèves la version écrite de la désignation parlée. On observe que l'interprétation multiplicative n'y est cependant pas en jeu. Ainsi, dans les procédures observées, relativement peu d'éléments de l'interprétation de référence de l'écriture chiffrée interviennent (cf. le tableau 2 sur la comparaison des interprétations). Dans les autres tâches, l'écriture chiffrée garde aussi (souvent) ce statut de version écrite de la désignation parlée, avec parfois l'utilisation (en-acte) de certaines autres propriétés de l'interprétation de référence. On note ici cependant des échecs au niveau de la mise en signes (inversion des chiffres). En outre, lorsque l'interprétation multiplicative est apparue elle est le fait du même élève, ce qui relativise l'influence que l'on pourrait donner à la nature de la tâche.

1.2 Par élève

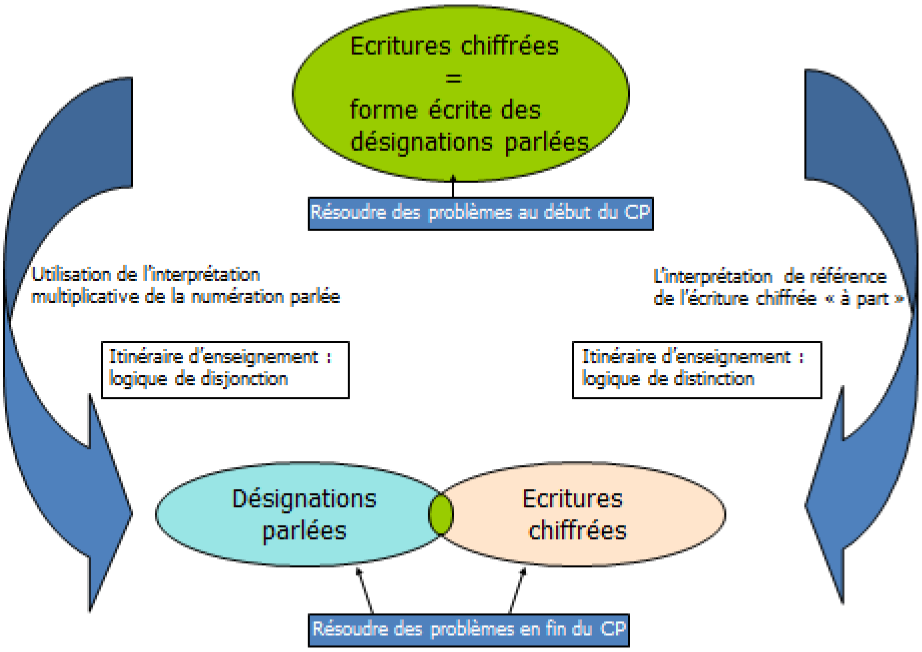
Les élèves utilisent des procédures qui peuvent être analysées comme mettant en jeu des propriétés des interprétations des numérations faites au paragraphe I. Chaque élève utilise préférentiellement des propriétés relative à une interprétation, et ceci quelle que soit la tâche. Nadjma utilise des éléments d'une interprétation de référence et d'une interprétation ordinale tandis que Sofiane et Thomas privilégient l'interprétation ordinale avec repérants ou/et additive, Thomas mettant en outre en jeu des propriétés d'une interprétation multiplicative dans la tâche 3 (mais pas dans la 2). Des évolutions sont cependant à signaler selon les nombres proposés aux élèves ou selon les tâches (voir la tâche 4 et le traitement différent de Thomas pour les tâches 2 et 3). Des hypothèses peuvent être formulées sur les rapports qu'entretiennent les élèves avec l'écriture chiffrée.

Aucun élève ne conçoit l'écriture chiffrée, tout au moins directement, comme indiquant le cardinal d'une collection dans l'intégralité des tâches proposées. Dans la tâche 1, l'écriture chiffrée semble la version écrite de la désignation parlée. Dans les autres, qui ne sont pas des dénombrements « classiques », les élèves évoluent différemment. Thomas et Sofiane ne semblent pas changer de conception, mais cela ne va pas les mener à utiliser des procédures identiques. En conséquence on peut y voir des traces d'une évolution des interprétations utilisées. Thomas va ainsi utiliser des éléments d'une interprétation multiplicative pour relier l'écriture chiffrée et la désignation parlée. Ce n'est pas toujours le cas pour Sofiane. En effet, lorsque ce dernier a été confronté à la tâche 2, indiquer par une dénomination en dizaines et unités (bon de commande) le cardinal d'une collection non manipulable, mais cette fois-ci pour une collection de 45 objets, il a échoué. Il les a numérotés de 1 à 45 puis a transcrit « 45 » en l'oral « quarante-cinq ». Il a alors trouvé quatre dizaines (et écrit « 4 enveloppes une dizaine »), mais n'a pas utilisé la désignation orale pour obtenir le nombre de boutons « tout seuls ». Il est reparti de l'écriture chiffrée mais en considérant toutes les écritures chiffrées qui lui ont servies à numéroter les objets. Il a alors tenté de faire la somme des chiffres des unités de tous les nombres à deux chiffres. La désignation parlée n'est donc pas associée à 4 dizaines plus (et encore) 5 : l'interprétation multiplicative n'est pas mobilisée. Pour Nadjma, chaque chiffre indique le nombre d'objets d'un certain type. Les deux chiffres ensemble ne semblent pas indiquer le cardinal (l'exception étant la tâche 1) et quand ils sont considérés simultanément, ils sont ajoutés. Certains contextes, comme celui du dénombrement « classique », lui semblent nécessaires pour concevoir une écriture chiffrée comme un signifiant du nombre. En outre, Nadjma se trompe dans la mise en signes (ordre des chiffres). Ce n'est pas le cas de Thomas et Sofiane.

Ainsi, en relevant les propriétés des interprétations mises en jeu, on peut inférer trois rapports à l'écriture chiffrée différents, mais ce rapport semble encore peu stable et influencé par la tâche et les nombres.

2 Les apports des auteurs de l'atelier : les itinéraires cognitifs d'enseignement

Les auteurs de l'atelier ont fait valoir que l'analyse ci-dessus peut amener à formuler des hypothèses sur la relation entre le nombre et les deux numérations. Les élèves ont des difficultés à concevoir l'écriture chiffrée comme autre que la version écrite de la numération parlée. Lorsqu'ils distinguent cependant les deux chiffres d'une écriture chiffrée sans référence à la numération parlée, non seulement ils prennent en compte difficilement le caractère conventionnel de la position des chiffres, mais plus encore ils n'accordent plus nécessairement à l'écriture le statut de signifiant du nombre (ici de la quantité). Ces hypothèses vont dans le sens de nombreuses recherches en didactique, De Blois (1995), Mounier (2010). Les auteurs de l'atelier ont proposé de regarder le problème précédent en questionnant la place de la numération parlée dans l'apprentissage de la numération écrite de position. Ils ont présenté un bilan de la situation au CP telle qu'elle a été analysée par Mounier (2010). En utilisant la notion d'itinéraire cognitif d'enseignement, deux logiques pour l'enseignement initial de la numération y sont définies : celle de distinction et celle de disjonction.



Mounier (2010) considère l'objectif d'apprentissage suivant : faire en sorte que les élèves puissent mobiliser des connaissances afférentes aux deux numérations selon les problèmes qu'ils résolvent, voire de disposer de ces connaissances (au sens d'Aline Robert 2008). Il envisage alors deux grandes catégories d'itinéraires cognitifs d'enseignement. A leur entrée en CP, l'écriture chiffrée est pour les élèves la forme écrite du nom du nombre exprimé dans la numération parlée en France. Il s'agit alors soit de disjoindre les deux numérations en faisant apparaître ce qu'il y a de commun aux deux via une interprétation multiplicative (logique de disjonction), soit de « construire » la numération écrite chiffrée sans recourir initialement à ces points communs, puis ensuite de les faire apparaître (logique de distinction).

3 Le débat dans l'atelier sur les itinéraires

Dans la logique de disjonction, la difficulté est tout d'abord de faire émerger l'interprétation multiplicative (ou certaines de ses caractéristiques). Ensuite, l'écriture chiffrée étant donnée *a priori*, certains aspects de la mise en signes (comme le choix de dix, la régularité des types de groupements et leur maximalité) semblent plus difficilement questionnables en tant que choix d'une mise en signes de principes mathématiques. Ceci peut se cristalliser en particulier au moment de la justification du « 0 », par exemple dans « 10 ». Il semble ainsi plus difficile de faire apparaître le système décimal chiffré comme une numération à part entière, c'est-à-dire autre qu'un moyen astucieux d'écrire les nombres « dits ». Dans la logique de distinction, le nombre a été conceptualisé via les désignations de la numération parlée. En conséquence, pour construire la numération écrite chiffrée « à part », comment concevoir des situations d'apprentissage sur le nombre qui ne vont pas la parasiter ? En outre, si cette numération est élaborée, est-ce que l'itinéraire ne va pas permettre (encore) plus difficilement aux élèves de percevoir l'écriture chiffrée comme un signifiant du nombre ?

Par ailleurs, les avantages et les inconvénients des itinéraires d'enseignement peuvent être regardés à d'autres niveaux. Des pistes didactiques ont déjà été ouvertes quant à des possibilités de séquences en classe, y compris pour un itinéraire qui suit une logique de distinction, Chevalier (2008). La question est de savoir comment jouer des connaissances qui sont véhiculées en dehors de la classe (le nombre via la comptine numérique), mais aussi prendre en compte des contraintes institutionnelles (programmes, curricula), des ressources existantes (manuels, fichiers, exercices en ligne) et des habitudes du métier (la prégnance de la comptine numérique, que ce soit sa version orale ou chiffrée dans la « frise » des nombres au-dessus du tableau). En outre, la question se pose d'anticiper dès la maternelle les difficultés conceptuelles des élèves qui ont été signalées. La scolarité obligatoire étant actuellement au niveau du CP, les auteurs de l'atelier font valoir qu'en l'état actuel des choses, il est difficile de ne pas tenir compte d'un contexte culturel qui rend prégnant l'abord du nombre via des tâches de dénombrement à l'aide de la comptine numérique, l'écriture chiffrée restant une version écrite de la désignation orale des nombres. La tâche de dénombrement pouvant être alors source de difficultés pour amorcer en classe un itinéraire d'enseignement qui suit une logique de distinction, une alternative pour l'enseignement est alors le recours à des tâches de comparaison de collections, Mounier (2010).

IV - CONCLUSION

Des apports et des limites.

L'analyse des procédures peut se faire en fonction des interprétations issues de l'analyse des signes des numérations. Ceci constitue un résultat important, en particulier pour la méthodologie de recherches futures. Les participants ont en effet pu retrouver dans les procédures des élèves des propriétés (en-acte) faisant écho à celles des interprétations théoriques des numérations de la thèse d'Eric Mounier. Cependant certains cas étaient plus discutés. Deux raisons peuvent être invoquées.

La première est un manque d'informations. L'analyse des procédures de chaque élève pour une plus grande variété de tâches permettrait d'infirmer ou de confirmer certaines hypothèses sur les élèves. En ce qui concerne chaque tâche, il semble nécessaire de recueillir un plus grand nombre de procédures d'élèves (y compris en proposant différentes variables didactiques, en particulier concernant les nombres). Par ailleurs, les explications données par les élèves *a posteriori* à la demande du chercheur sont à prendre en compte avec des réserves. L'élève peut en effet indiquer une autre procédure que celle qu'il a utilisée ou encore ne pas avoir les connaissances nécessaires pour pouvoir s'exprimer avec précision.

La deuxième raison vient de la nature des interprétations faites dans la thèse d'Eric Mounier. La proximité entre certaines interprétations est source de difficulté quand on essaye de les repérer dans les procédures des élèves de CP. Comment distinguer dans l'emploi de la comptine numérique un, deux, trois, etc. l'interprétation ordinale de celle ordinale avec repérants ? Comment distinguer dans l'emploi de la suite (dix), vingt, trente, l'interprétation additive de celle ordinale avec repérants ? En effet, les élèves de CP ne sont pas encore familiers des problèmes de la structure additive, ni du vocabulaire afférent. Ainsi, en quoi le fait de dire « vingt plus dix » ou d'agir sur les collections (réunions, groupements, organisation) est-il un indice qu'une opération arithmétique est en jeu (en-acte) ? Il en est de même pour l'interprétation arithmétique multiplicative. Qu'y a-t-il d'arithmétique dans « huit dizaines, ça fait quatre-vingts » concernant la procédure de Thomas pour la tâche 3 ? Les problèmes de la structure multiplicative n'étant pas au programme de CP peut-on y reconnaître « huit fois dix » ? La théorie des champs conceptuels permet d'appréhender chez un élève particulier la nature de ce lien, mais ceci nécessite d'avoir la connaissance des classes de problème qu'il rencontre, de ses procédures et des signifiants qu'il met en jeu. Néanmoins, il semble possible d'inférer de l'observation des procédures d'un élève le fait que ce dernier n'utilise pas (en-acte) des propriétés relatives à l'interprétation de référence de l'écriture chiffrée. Par exemple, dans la tâche 3 Thomas compte <u>huit</u> enveloppes « une dizaine », et <u>six</u> boutons « tout seuls » mais n'utilise pas la transcription de ces deux désignations en chiffre puisqu'il repasse par la désignation orale « quatre-vingt-six ».

De nouvelles questions et des perspectives

« Quelle est l'influence des tâches sur la nature des mathématiques en jeu, selon qu'elles relèvent de telle ou telle interprétation ? Y a-t-il des élèves qui usent systématiquement de procédures analysables comme relevant de telle ou telle interprétation ? ». Les réponses apportées à ces deux questions sont qualitatives et demandent une étude complémentaire portant sur un nombre plus important d'élèves. Il est difficile de faire une « cartographie » des élèves d'un côté et des tâches d'un autre, mais les critères