LES OUTILS SÉMIOTIQUES DU TRAVAIL MATHÉMATIQUE*

Yves CHEVALLARD
Professeur des universités
IUFM et IREM d'Aix-Marseille

I. L'activité mathématique

Le thème que je voudrais aborder ici peut être d'emblée formulé de manière très simple. En quoi consiste l'activité mathématique ? Que fait-on lorsqu'on « fait » des mathématiques ? Comment peut-on décrire et analyser l'activité mathématique ? Ou, pour parler un langage plus ampoulé, comment *penser* l'activité mathématique ?

A cette entrée en matière j'ajoute immédiatement trois remarques.

Première remarque. Je ne chercherai pas à *caractériser* l'activité mathématique, c'est-à-dire à en faire apparaître la spécificité dans l'ensemble des pratiques humaines. Tout au contraire, on verra que la stratégie analytique adoptée ici consiste, pour l'essentiel, à réinsérer l'activité mathématique dans l'ensemble des activités humaines. Et cela, par un travail interprétatif visant à dissoudre l'aura de singularité, voire d'étrangeté que la culture a depuis longtemps dessinée autour du travail mathématique.

Deuxième remarque. Les questions formulées plus haut fixent seulement un point de départ à l'analyse. Elles ont d'abord pour fonction de donner un sens, en leur conférant le statut rhétorique de réponses, aux assertions que l'analyse dégagera. Mais je ne saurais, bien évidemment, apporter - ni même prétendre rechercher - des réponses aux questions globales énoncées, qui ont pour premier mérite d'être culturellement compréhensibles, et qu'il resterait à *problématiser*, je veux dire à transformer en problèmes à résoudre, afin qu'elles prennent rang parmi les énigmes dont le chercheur s'occupe.

Troisième remarque. Les questions posées, et les problèmes qui pourraient en être dérivés, ne s'inscrivent pas naturellement dans le cadre de la didactique des mathématiques. Je les situerai, quant à moi, dans un domaine plus large, celui de l'*anthropologie des mathématiques*, dont la didactique des mathématiques n'est qu'une partie. Mais c'est bien parce qu'elles apparaissent comme la clé probable d'un certain nombre de problèmes de didactique que ces questions figurent ici. Le didacticien ne peut être lui-même si, lorsque l'exige l'économie de ses recherches, il hésite à sortir de

* Cet article est déjà paru dans la publication de l'IUFM de Marseille, Skholê, n° 1, 1994.

son territoire strict - à l'intersection de l'anthropologie du mathématique et de l'anthropologie du didactique - pour explorer de plus vastes régions.

II. Raisonner mathématiquement

Cela noté, je reviens à mes questions. Que fait donc le mathématicien au travail ? Longtemps, avec une économie de moyens qui force le respect, la Culture a cru pouvoir répondre : *il raisonne*. Ou plutôt - car d'autres que lui le font, la chose doit être concédée - il raisonne *mathématiquement*. Voyez alors le dictionnaire : les mathématiques sont la science du nombre et de l'espace. Raisonner mathématiquement, c'est raisonner sur le nombre et sur l'espace. Autrement dit, sur des nombres et sur des figures. Soit l'exemple suivant.

Enoncé

Démontrer que les médianes d'un triangle ABC sont concourantes aux 2/3 de leur longueur à partir du sommet correspondant.

On suppose connues, ici, quelques-unes des propriétés de base du parallélogramme, ainsi que le résultat suivant : *le segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et de longueur moitié.*

Solution

Considérons les médianes [BB'] et [CC'] (voir la figure 1). Soit G leur point d'intersection, et soient L et M les milieux des segments [BG] et [CG]. Le segment [B'C'], qui joint les milieux des côtés [AB] et [AC] du triangle ABC, est parallèle au côté [BC] et de longueur moitié (B'C' = BC/2). De même, le segment [LM], qui joint les milieux des côtés [GB] et [GC] du triangle GBC, est parallèle au côté [BC] et de longueur moitié (LM = BC/2). Le quadrilatère LMB'C' a ainsi ses deux côtés opposés [LM] et [B'C'] parallèles et de même longueur : c'est donc un parallélogramme. Par suite, ses diagonales, [LB'] et [MC'], se coupent en leur milieu, G. Le point G est donc situé sur chacune des deux médianes aux 2/3 de leur longueur à partir du sommet correspondant. Il en est donc de même s'agissant de la troisième médiane.

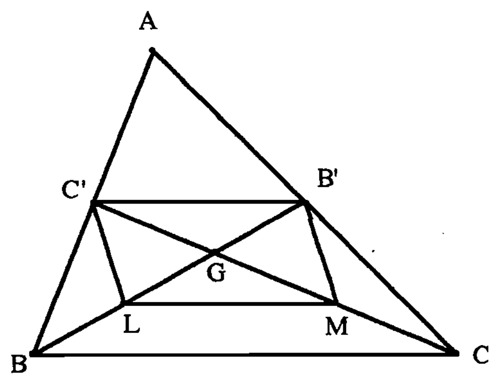

Figure 1

L'exemple précédent, j'en suis sûr, vous aura rappelé quelque chose de la géométrie enseignée à l'école. Souvenirs mitigés ? Voici maintenant un exemple - énoncé et solution - qui ne ravivera des souvenirs que chez les plus anciens d'entre nous : je l'emprunte à l'arithmétique d'autrefois[1].

Enoncé
On paie une somme de 505 francs avec des billets de 20 francs et des billets de 5 francs. On a donné en tout 38 billets. Combien en a-t-on donné de chaque espèce ?

Solution
Imaginons qu'on ait donné 38 billets de 5 francs. On n'aurait payé que 5x38 = 190 francs, et par suite il manquerait

505 - 190 = 315 francs.

Remplaçons alors un billet de 5 francs par un billet de 20 francs. Le nombre des billets reste 38 et la somme payée augmente de 15 francs. Pour l'augmenter de 315 francs il faudra effectuer une telle substitution

315 : 15 = 21 fois.

On aura donc donné 21 billets de 20 francs et 38 - 21 = 17 billets de 5 francs.

Seuls nos Modernes, peut-être, trouveraient ici à redire. (Ils argueraient par exemple du caractère *artificiel* d'un problème dont le sens, en fait, désormais leur échappe.) Mais rien dans tout cela qui puisse véritablement choquer la Culture : car, à un niveau bien humble encore, il est vrai, *voici l'Homme raisonnant !* Raisonnant mathématiquement : sur des figures, sur des nombres.

Nuançons. La Culture reconnaît des degrés dans la dignité des gestes : la présence de nombres altère ici la pureté de la raison, que le raisonnement géométrique portait à son point d'incandescence. Je prends ici pour guide et témoin Emile Chartier, *alias* Alain ; le philosophe Alain, comme on dit. Alain est un amant passionné de la Culture. D'où sa haine de la Société et de ses institutions - la Thèse, la Sorbonne, etc. Ecoutons-le[2] :

Les nombres sont des mécaniques en un sens. J'ajoute un, et encore un ; le comptable joint et sépare comme le mécanicien joint et sépare ; il forme total, produit, quotient ; en quoi il ne pense point du tout ; et, ce qui le prouve, c'est qu'une machine à compter formera total, produit, quotient, bien mieux que le comptable, et sans former aucun nombre véritable, ajoutant ou retranchant un et encore un par l'effet d'une roue dentée, d'un doigt de fer, d'un butoir, d'une vis.

Son commerce avec les nombres, sournoisement, tire l'*homo mathematicus* vers le bas. Combat entre la pesanteur et la grâce, où le nombre le pousse du mauvais côté :

---

1. Et plus exactement au *Précis d'arithmétique* de P. Chenevier destiné aux classes de 6ème, 4ème et 3ème, dans son édition de 1926, p.117.
2. *Propos sur l'éducation*, PUF, Paris, 1932, p.164.

vers le comptable, le mécanicien, la machine. Tandis que la géométrie est pur esprit. Ecoutons Alain, encore[3] :

La géométrie est un monde merveilleux, où l'on fait naître des idées singulières, comme sont les nombres véritables, mais un peu plus près de la nature que ne sont les nombres. Et de même que treize n'est pas douze plus un, de même, et encore plus évidemment, une surface n'est pas une somme de lignes, et un volume est encore un autre être. Un hexagone n'est nullement un pentagone avec un côté de plus ; ceux qui ont construit le pentagone régulier et l'hexagone régulier savent bien que ce sont deux êtres, qui ont chacun leur visage. Les solides réguliers, qui sont comme des cristaux sans matière, représentent les montagnes et les précipices dans ce voyage du géomètre. Et voilà comment l'homme pense, rassemblant l'expérience, l'imagination, et le raisonnement en chacune de ses démarches.

Que s'est-il passé entre le premier et le second exemples ? Ce qui s'introduit dans le second exemple, et dont le premier est exempt, *c'est le calcul.* Le calcul est une tache d'ombre dans le règne de la pensée. Il s'établit aux limites de son royaume. Il est la marque d'infâmie qui nous rappelle à notre finitude raisonneuse. De là que, de la géométrie à l'arithmétique - du moins à cette arithmétique qui ne traite pas des « véritables nombres » - se produit une chute dans l'ordre de l'esprit.

Mais il y a pire ! L'âge moderne, dès la fin du XVI siècle en Occident, a fait droit à cette abomination : *l'algèbre*, je veux dire *le calcul algébrique*. L'impure arithmétique maintenait tout de même la raison dans son royaume. L'algèbre se fait, se veut même - que l'on songe ici à Leibniz par exemple, à son rêve de *caractéristique universelle* - le tombeau de la pensée. A l'antique solution *par l'arithmétique*, l'âge moderne substitue sa solution *par l'algèbre*. Voyons cela, en reprenant notre second exemple.

Solution

Soit x le nombre de pièces de 20 francs ; le nombre de pièces de 5 francs est donc 38 - x. On a alors :

$$20x + 5(38-x) = 505.$$

Il vient alors, successivement :

$$\begin{gathered} 20x + 5(38 - x) = 505 \\ 20x + 190 - 5x = 505 \\ 15x = 505 - 190 = 315 \\ x = 315/15 = 21. \end{gathered}$$

On a donc $x = 21$ et $38 - x = 38 - 21 = 17$.

La machine algébrique vient de faire son office. Elle met la pensée en déroute. Le raisonnement, ici, est en pièces, et ne se survit plus que par menus fragments. La raison abdique. Alain, à nouveau[4] :

3. *Ibid.*
4. *Ibid.*

Puisqu'une machine à compter est possible, une machine à raisonner est possible. Et l'algèbre est déjà une sorte de machine à raisonner ; vous tournez la manivelle, et vous obtenez sans fatigue un résultat auquel la pensée n'arriverait qu'avec des peines infinies. L'algèbre ressemble à un tunnel ; vous passez sous la montagne, sans vous occuper des villages et des chemins tournants ; vous êtes de l'autre côté, et vous n'avez rien vu.

La Culture y perd sa raison. L'*homo mathematicus* trahit la pensée. On le croyait tout occuper à raisonner. Voici qu'on le surprend, monstre de duplicité, à jouer avec des signes. Encre et papier sont les instruments du crime. Son « raisonnement » - mais le mot a-t-il encore un sens ? - prend une forme hiéroglyphique. Il se fait, sous nos yeux, *écriture*, et se change en mécanique.

La Culture ne comprend plus. La rupture va être consommée. C'est le Grand Divorce d'avec la science, qui clôt trois siècles d'incompréhension. Voici qu'arrive la théorie de la relativité, avec ses monstres algébriques. Alain ferraille, en regrettant que la faiblesse de ses connaissances - son instruction mathématique n'est pas nulle, elle est seulement élémentaire - lui interdise de monter en première ligne. Regrets pour un monde ancien, refus du nouveau monde. Dans sa référence aux merveilles de la géométrie, l'acte de divorce qu'il signe s'ouvre par une image dont il serait cruel de souligner l'extrême ambiguïté[5].

Mais l'algèbre a passé là-dessus comme un vent du désert ; et la machine à penser fabrique aisément et en série toutes ces choses. Ce qui va fort bien pour l'usage, mais ce qui entraîne la pensée en d'étranges aventures ; comme si l'on fabrique des solides à quatre dimensions ; algébriquement cela va tout seul ; mais géométriquement non ; l'expérience manque. Ou encore si l'on dit que le temps est la quatrième dimension de l'espace ; algébriquement cela va tout seul ; mais ici l'expérience dit non.

Ce qui sauve la géométrie, au regard de la Culture, c'est que l'hydre de l'algèbre ne s'en est pas tout à fait emparée. On ne passe pas si aisément, en cette matière, d'une solution à l'antique à une solution par l'algèbre : le saut est ici bien plus grand, aussi longtemps du moins qu'on ne dispose que de cette algèbre particulière que la tradition a nommée *géométrie analytique*, dont l'emblème est le *système de coordonnées*, et qui s'oppose longtemps - le combat fait encore rage au XIX^{e} siècle - à la géométrie *pure* ou *synthétique*.

On fait bien, en géométrie, usage de lettres, pour nommer des points ou des droites, et cela depuis les Grecs. Mais, sur ces lettres-là, *on ne calcule pas*. On ne saura les enchaîner en un calcul qu'avec l'apparition, dans la deuxième moitié du XIX^{e} siècle, de ces formalismes qu'on peut dire, globalement, *vectoriels*. Mais aujourd'hui encore cette grande invention reste à la porte de nos classes. Aussi aucun élève - oserai-je écrire : aucun professeur ? - n'a jamais rencontré la solution suivante de notre problème de géométrie :

Solution

Soit O un point queconque du plan ; pour tout point M, on pose OM = m. On a : b' = c/2 + a/2, c' = a/2 + b/2. Eliminons a entre ces deux égalités. Il vient :

5. *Op. cit.*, p.165.

$$b' - c/2 = c' - b/2$$

soit encore

$$b' + b/2 = c' + c/2.$$

En divisant cette inégalité par 3/2, on obtient :

$$2/3\ b' + 1/3\ b = 2/3\ c' + 1/3\ c$$

ce qui montre que le point G tel que

$$g = 2/3\ b' + 1/3\ b = 2/3\ c' + 1/3\ c$$

appartient aux segments [BB'] et [CC'] et est situé sur chacun d'eux aux 2/3 de sa longueur à partir du sommet correspondant. Désignant par A' le milieu de [BC], on a alors :

$$\begin{aligned} g &= 2/3\ b' + 1/3\ b = 2/3\ (c/2 + a/2) + 1/3\ b \\ &= a/3 + b/3 + c/3 \\ &= a/3 + 2/3\ (b/2 + c/2) = 1/3\ a + 2/3\ a' \end{aligned}$$

ce qui montre que G est situé sur la médiane [AA'], aux 2/3 de sa longueur à partir de A.

Où sont passés, ici, les beaux raisonnements dont nous régale, ordinairement, la géométrie, et dont la Culture ne parvient pas à faire son deuil ? L'incompréhension, l'incommunication sont totales. Car pour le mathématicien, nul doute, je crois, n'est permis. Il s'agit là d'une belle démonstration, et qui exige une belle habileté raisonneuse. Mais la Culture n'y voit goutte.

III. Le calcul, ou le Grand Divorce

Il faudra pourtant s'y résigner. L'activité mathématique n'est pas faite que de raisonnements. Il faut transiger. Il y aura donc, en mathématiques, le *raisonnement*, et le *calcul* - sous-entendu : qui n'est pas un raisonnement. La pensée pure s'y mâtine d'impure mécanique. Telle est la solution à laquelle la Culture doit s'arrêter. En faisant droit, à regret, au principe de réalité.

Nous nous interrogerons plus loin sur cette indignité *culturelle* du calcul, et singulièrement de l'algèbre. La pression est si forte qu'elle s'imposerait presque au mathématicien au repos. (Vous verrez ça et là quelques-uns d'entre eux faire les jolis coeurs avec la Culture - cette vieille coquette qu'il faut rassurer sur ses charmes - et flirter avec le thème de la substitution des idées au calcul, du calcul qu'il faut savoir dépasser, etc.) Mais, globalement, le doute n'est pas permis. L'irruption de l'algèbre, fin XVI^{e}-début XVII^{e}, est saluée *comme une révolution* par les mathématiciens.

Je ne m'engagerai pas ici dans une argumentation systématique à cet égard, car la chose est bien trop évidente. Et je me contenterai d'illustrer cette évidence d'une manière un peu oblique.

J'ai sous les yeux un ouvrage paru en 1966, qui réunit, sous le titre *The Role of Mathematics in the Rise of Science*, divers essais d'analyse épistémologique et historique dus à un éminent mathématicien, Salomon Bochner(6). Le premier de ces essais est intitulé *From Myth to Mathematics to Knowledge*, et se termine par une étude sur « le caractère abstrait des mathématiques ». Bochner appartient à cette rare espèce d'érudits qui, contrairement aux idées dominantes en la matière, ne mettent pas très haut l'oeuvre scientifique des anciens Grecs. (Dans cette confrérie un peu confidentielle, il compte par exemple Jacob Burckhard, l'historien de la Renaissance italienne.) Or, pour faire entendre ce qu'il met sous l'expression d'abstraction des mathématiques, Bochner choisit d'examiner le cas des mathématiques grecques, dans le but précisément de montrer que l'abstraction mathématique, en son sens fort, *en est presque totalement absente*.

Il commence pour cela par rejeter des accusations qui lui paraissent sans grand fondement : les Grecs n'auraient pas su utiliser les symboles dont fourmillent les mathématiques de l'âge moderne, et cela aurait provoqué l'échec final de la mathématique grecque. Il note à cet égard(7) :

...it would not be proper to say that, in general, the Greeks did not have an affinity to thinking in symbols, mathematical or related ones. This is simply not true ; in a certain qualified sense the Greeks even had a marked affinity to thinking in symbols. For instance, by all evidence it was the Greeks who were the first to use the letters of the alphabet as "symbols" for numerals. The alphabet itself was not of their own creation ; this they took from the Phoenicians. However, the Phoenicians themselves never used their alphabet for numerical purposes but had separate signs for numbers, whereas the Greek installation of the alphabetical system of numerals is presumed to reach back into the 8th century B.C.

Also, Aristotle in his *Prior Analytics* employs letters as symbols for logical data, and he is not in the least self-conscious about it ; neither Aristotle himself nor anybody else in antiquity saw anything unusual or original in this.

En vérité, l'emploi des lettres dans la science grecque est chose si frappante que, note Bochner, certains commentateurs modernes se sont extasiés devant lui(8) :

Paul Tannery notes that Aristotle uses letters as symbolic representations of objects of thought, and to Tannery this means that the Greeks were only a step away from the algebraic algorithm of Viète. He is distressed over the fact that Pythagoreans did not take the same step as did Viète but instead abandoned themselves to sterile reveries. J. Jorgensen [in *A Treatise of Formal Logic*, vol I (1931), p.47] echoes Tannery when saying that "in his treatment of propositions and syllogisms, Aristotle uses

6. Salomon Bochner, *The Role of Mathematics in the Rise of Science*, Princeton University Press, Princeton, 1966.
7. *Op. cit.*, p.50.
8. *Ibid.*

letters as symbols for the terms, thus laying the first foundation of all subsequent symbolic logic and algebra."

Mais là, Bochner est encore moins d'accord. Car tout cela n'est que broutille ! De ces prétendus génies de la science, c'est bien autre chose que l'on aurait été en droit d'attendre. Quoi donc ? Voici[9] :

It would have been much more notable and original if the Greeks, by suitable abstractions, had created the conception of a space of more than three dimensions, say of four dimensions, or, even more comprehensively, of any (unspecified) number of dimensions. But this they most decidedly never did, or ever remotely foreshadowed.

A ces affirmations, qui n'auraient pas manqué de scandaliser Alain, Bochner imagine une objection, qu'il formule ainsi[10] :

The introduction of some types of spaces of several dimensions was effectively begun by Lagrange in his *Méchanique analytique* in the second half of the 18th century, when he introduced *generalized parameters* for mechanical systems with restraints. It was strongly dependent on the introduction of coordinate systems into ordinary space, and such coordinate systems gradually evolved out of the *Géometrie* of Descartes in the 17th century. The Greeks however, from whatever reasons, never introduced coordinate systems. Thus, one might object, it does not make sense to reproach the Greeks for not having introduced multidimensional geometry, if they happened not to be in possession of a device which is an indispensable prerequisite for it.

Mais voilà : cet argument, pour Bochner, ne tient guère. Car tout le problème, précisément, est que les Grecs ont été même incapables de se rendre disponible cet artifice fondamental que sont les systèmes de coordonnées ! Ecoutons-le encore une fois, en un passage qui en surprendra plus d'un[11] :

...it is incomprehensible and "inexcusable" that the Greeks did not introduce coordinate systems into their space. What is much worse, and much more inexcusable, they were hardly able to introduce a coordinate system on the (one-dimensional) time-axis, that is, in other words, to introduce a common calendar for general use. The citizens' chronology of the Greeks of the classical period is not a testimonial to their greatness. For example, Thucydides was a very eminent historian, and before him there had been a galaxy of scientist philosophers - Thales, Pythagoras, Anaximander, Anaximenes, Hecataeus, Heraclitus, Xenophanes, and Parmenides, and others - whose name glitter from the pages of history books. But between them they did not generate enough spontaneity for the construction of a usable calendar, so that there would be no need for Thucydides to have recourse to his notorious "summer-and-winter" calculus of dates, than which there is nothing more embarrassing in the entire extant corpus of Greek writing. When Thucydides wants to fix not only the season but even a given month of a given year he has to verbalize a monstrosity like this : "When Chrysis had been priestess at Argos for 47 years, Aenesius being then ephor at Sparta,

9. *Op. cit.*, p.52.
10. *Ibid.*
11. *Ibid.*, pp.52-53.

Pythodorus having yet four months left of his archonship at Athens" (Thucydides, ii, 2, I) = April, 431 B.C.

Voilà donc ce qui, pour l'auteur que nous avons suivi, signe l'incapacité grecque à l'abstraction mathématique... La Culture, devant cela, reste muette, si elle ne s'étrangle pas de fureur !

Qu'on me permette d'en rajouter un peu. On a vu Bochner se référer à Lagrange et à une oeuvre savante s'il en est, sa *Méchanique Analytique* de 1788. Mais l'idée même d'espace multidimensionnel apparaît, à la même époque, sous la plume d'un mathématicien de semblable calibre - il s'agit de D'Alembert -, dans un ouvrage qui, au fond, n'est que de haute vulgarisation. Dans l'article DIMENSION, qu'il rédige pour le volume 4, paru en 1754, de l'*Encyclopédie*, D'Alembert écrit en effet, sans autre façon :

Cette manière de considérer les quantités de plus de trois dimensions est aussi exacte que l'autre, car les lettres peuvent toujours être regardées comme représentant des nombres rationnels ou non. J'ai dit plus haut qu'il n'était pas possible de concevoir plus de trois dimensions. Un homme d'esprit de ma connaissance croit qu'on pourrait cependant regarder la durée comme une quatrième dimension, et que le produit temps par la solidité serait en quelque manière un produit de quatre dimensions ; cette idée peut être contestée, mais elle a, ce me semble, quelque mérite, quand ce ne serait que celui de la nouveauté.

Les émois d'Alain et de bien d'autres bons esprits, plus d'un siècle et demi plus tard, face à cette quatrième dimension dont Einstein fait offense à la Culture, traduisent une belle ignorance, et une incompréhension dramatique, sur laquelle nous devrons maintenant nous interroger.

IV. Une écriture sans parole

Que se passe-t-il donc, en ce que nous avons vu, qui puisse à ce point effaroucher la Culture ? Deux points sont à expliquer, dont nous verrons les liens.

Premier point. Dans l'usage des formalismes mathématiques - dont le calcul algébrique est le modèle historique -, la Culture voit a priori un abaissement, un évanouissement de la pensée : il y a donc *péjoration culturelle de l'algèbre* (et des formalismes).

Second point. A ce désenchantement face à la trahison des savants s'ajoute la plus profonde déconcertation : la Culture est même incapable de penser la question des formalismes ; elle ne comprend pas ce qui se passe, et se contente d'établir un cordon sanitaire à l'aide de ce mot-fétiche, *calcul.* Pourquoi tout cela ?

Entre raisonnement et calcul, il y a, culturellement, un infranchissable fossé, une séparation radicale. La matière où s'exprime le raisonnement, c'est la *parole*, le discours dans son oralité première. Qu'on le découvre sur la page d'un livre, qu'on le consigne par écrit sur la page d'un cahier, tout cela ne change rien à l'affaire : le discours de la raison - le raisonnement - s'y présente à nous, alors, sous la forme d'un texte qui n'est jamais que *de l'oral mis par écrit*. Accident de la parole, il attend là, sagement, de revivre dans sa forme pleine, véridique : orale.

Avec l'introduction du formalisme algébrique, voici que tout change. L'écriture algébrique peut bien sûr être *lue* - fort maladroitement : « oralisée », plutôt que lue. Mais elle est une écriture qui ne renvoie *à aucune parole*, à aucun discours *dont elle procéderait*. Une écriture *qui n'est la mise par écrit de rien, et ne procède que d'elle-même*. Née d'emblée dans le registre de la scription, elle y acquiert tout sons sens, ou elle n'en n'a aucun. Le drame culturel se noue autour de cette énigme : le statut de l'écriture algébrique, forme écrite d'un introuvable discours.

D'où vient alors la péjoration culturelle de l'écriture algébrique - cette mécanique d'où la pensée s'est enfuie ? La réponse, je l'emprunte ici à Jacques Derrida qui, il y a un quart de siècle, nous a ouvert la voie par une thèse radicale, consignée dans un gros livre, *De la grammatologie*(12). Voici donc : il y a *péjoration culturelle de l'écriture*. Du moins dans la Culture occidentale. Depuis qu'en Occident il y a des hommes, et qui pensent, et qui écrivent.

Ce point soulève immédiatement une difficulté que je voudrais tenter d'éclairer. Peut-être, en effet, pensez-vous là-dessus comme Saussure - qui, lui, déteste l'écriture, et ne se prive pas de le dire. Le chapitre VI de son *Cours de linguistique générale*(13) est consacré à la *Représentation de la langue par l'écriture*. Son paragraphe 2 porte ce titre : *Prestige de l'écriture ; causes de son ascendant sur la forme parlée*. Peut-être, donc, penserez-vous que la thèse de la péjoration de l'écriture, qui renverse l'évidence partagée, n'est qu'une facétie d'intellectuels.

Il y a bien, en effet, un prestige de l'écrit (plus peut-être que de l'écriture). L'écrit est du côté des puissants, lettrés et gens de lettres. Il est l'arme et le signe du pouvoir. Et, lorsqu'il leur fallut, naguère, renoncer à parler des sociétés que nos grands-parents nommaient, sans ambages, *primitives*, les anthropologues ne forgèrent-ils pas cet euphémisme : sociétés *sans écriture ?* Sans doute.

Mais il y a, à ce prestige de l'écriture, une condition fondamentale. Car l'écriture n'existerait pas en soi. Elle ne serait que la servante de la langue, du discours, et, au-delà, de la raison, du *logos*. Elle ne vaudrait que parce qu'elle fixe, pérennise, diffuse une pensée, que la langue, dit-on, exprime. Tel est le fondement du prestige de l'écriture. Et c'est cela précisément - cette condition dépendante, ancillaire, seconde, de l'écriture - que rappelle Saussure lorsqu'il entreprend de remettre les choses en place (14) :

Langue et écriture sont deux systèmes de signes distincts ; l'unique raison d'être du second est de représenter le premier ; l'objet linguistique n'est pas défini par la combinaison du mot écrit et du mot parlé ; ce dernier constitue à lui seul cet objet. Mais le mot écrit se mêle si intimement au mot parlé dont il est l'image, qu'il finit par usurper le rôle principal ; on en vient à donner autant et plus d'importance à la

12. Jacques Derrida, *De la grammatologie*, Editions de Minuit, Paris, 1967.
13. Ferdinand de Saussure, *Cours de linguistique générale*, Payot, Paris, 1972.
14. *Op. cit.*, p.45.

représentation du signe vocal qu'à ce signe lui-même. C'est comme si l'on croyait que, pour connaître quelqu'un, il vaut mieux regarder sa photographie que son visage.

Saussure n'est pas seul. Avant lui, voici Rousseau, qui se fait, au fond, la voix de la Culture - laquelle prétend s'exprimer en notre nom à tous[15] :

Les langues sont faites pour être parlées, l'écriture ne sert que de supplément à la parole... la parole représente la pensée par des signes conventionnels, et l'écriture représente de même la parole. Ainsi l'art d'écrire n'est qu'une représentation médiate de la pensée.

Il n'y a pas de place ici, on le voit, pour une écriture *qui ne serait qu'écriture*. Le prestige de l'écriture s'évanouit lorsque cette filiation - de la pensée à la parole, puis à l'écriture - se trouve rompue - comme il en va avec l'écriture algébrique - parce que la parole, la voix, la *phonè* - à quoi se reconnaît la pensée - vient tout à coup à manquer.

Je condense maintenant, par un résumé d'emprunt, déjà ancien, et un peu long, mais qui nous ramènera à notre sujet, l'essentiel de ce qui nous intéresse ici dans l'analyse derridienne[16] :

L'étude de l'écriture - la grammatologie - a fait l'objet, au cours des dix dernières années, d'un renouvellement fondamental et d'un changement de niveau dans l'oeuvre de J. Derrida.

D'une part, il faut remarquer (et commencer de s'en étonner) que presque partout (partout en Occident, sous la domination de l'écriture phonétique), le langage *parlé* s'est trouvé privilégié comme constituant le langage par excellence, dont le langage *écrit* ne serait qu'une image redoublée, une reproduction auxiliaire, ou un instrument commode - *signifiant de signifiant*. Et dès lors, la parole serait la vérité, la « nature » et l'origine de la langue, dont l'écriture ne serait qu'un rejeton bâtard, un supplément artificiel, un dérivé non nécessaire, enfin. Il y a là un jugement de valeur, et une structuration implicite, dont peut se repérer inlassablement la présence tout au long de notre tradition qu'on dira pour cela **phonocentrique**, dès avant Platon et jusqu'à Saussure, au chapitre VI de l'Introduction du *Cours*.

D'autre part, ce privilège du signifiant phonique sur le signifiant graphique ne peut se *légitimer* qu'à partir de la distinction entre ce qui serait un *dedans* (où la pensée réside) et ce qui serait un *dehors* (où l'écriture tombe). La parole est l'expression la plus « proche » de la « conscience », - quand, même, la voix n'est pas conçue comme un quasi-effacement du signifiant. Or, on ne fait pas sa part à un tel schéma. C'est sur lui - donc sur l'abaissement de l'écriture - qu'est organisé à son tour notre concept du *signe* (...) avec sa chaîne de différences symétriques : signifié/signifiant, intelligible/ sensible, contenu/expression. Et c'est lui encore qui gouverne notre concept de vérité, « inséparable de l'instance d'une *raison* pensée dans la descendance du *logos* » : où, donc, « le lien originaire et essentiel à la *phonè* n'a jamais été

15. Cité *in* Derrida, *op. cit.*, p.207.
16. Oswald Ducrot et Tzvetan Todorov, *Dictionnaire encyclopédique des sciences du langage*, Editions du Seuil, Paris, 1972, p.435.

rompu ». Bref, il y a une métaphysique de l'écriture phonétique - qu'on pourra repérer désormais comme le **logocentrisme** - et au plus juste c'est *la* métaphysique même : et on comprend ici pourquoi reste prise dans sa structure notre pensée en son ensemble, jusqu'en un modèle de la scientificité né à un certain moment de l'histoire de l'écriture, à partir d'un certain rapport entre l'écriture/le signifiant et la phonè.

Tel est donc le lieu où prend sa source l'indignité de l'écriture algébrique - et, déjà, cette ambiguïté qu'Alain reconnaissait dans le simple calcul numérique. Pour le logocentrisme occidental, une écriture qui n'est pas un simple accident de la parole, qui n'est qu'écriture, qui ne s'autorise que d'elle-même, qui rompt le lien originaire avec le *logos*, en annulant la *phonè*, ou plutôt, renversant les rapports établis, en ne lui donnant plus qu'une place seconde, de simple lecture orale d'une réalité en son essence écrite, voilà le non-sens, voilà l'aberration.

Il faudra maintenant nous interroger, précisément, sur les voies par lesquelles, contre son premier mouvement en forme de haut-le-coeur, la Culture a tout de même entrepris de penser l'impensable.

V. Langues formelles

Il est une manière - celle d'Alain - de penser l'écriture algébrique qui signe son abaissement, et son exclusion culturelle : en termes de mécanique. Cette écriture serait une machine que le mathématicien fait aller - entre deux bouffées de raisonnement, s'il se peut. Mais cette explication n'en est une que le temps d'un mouvement d'humeur, que la déception engendre.

Il est une autre manière, qui tente de la sauver. Comment donner sens à cette écriture qui se moque de la langue, nargue la parole, répudie le *logos*, et humilie la pensée ? Même si la chose peut surprendre, on va la regarder comme une langue. Langue singulière, sans doute ; mais langue à part entière : langue *formelle*.

La solution est fragile. Elle ne s'en impose pas moins. Les mathématiques, dira Bachelard(17), sont un langage « qui, pour ainsi dire, pense tout seul ». Dominique Lecourt, commentant la formule(18), note aussitôt « qu'un langage qui pense tout seul n'est précisément plus un langage aux yeux d'un philosophe classique ». N'importe : voici reconduit l'indépassable schéma de la métaphysique occidentale.

Les lettres et autres symboles autour desquels s'affaire le mathématicien deviennent des signes. Des signes graphiques, sinon des signes vocaux, comme disait Saussure. Par là, la problématique du langage s'empare de l'activité mathématique.

Il y a (au moins) deux théories du signe : la théorie classique, et la théorie moderne - qui se formule dans le *Cours de linguistique générale*. La première, qui sous-tend encore notre rapport aux signes, s'exprime en nous quand, face aux symboles du mathématicien, nous demandons ingénument : qu'est-ce que cela *représente ?* Le

17. Gaston Bachelard, *Essai sur la connaissance approchée*, Vrin, Paris, 1973, p.10.
18. Dominique Lecourt, *L'épistémologie historique de Gaston Bachelard*, Vrin, Paris, 1974, p.45.

signe est alors « une chose représentant une autre chose »[19]. Cette *chose représentante*, au demeurant, peut être à peu près n'importe quoi. Les historiettes dont s'adorne l'arithmétique traditionnelle sont des signes, en ce sens. Ainsi des problèmes de robinets, ou de maçons, ou de marchands de vin. La *chose représentée*, en l'espèce, les mathématiques classiques ne savaient pas la représenter autrement. De là que les livres d'arithmétique d'autrefois soient remplis d'histoires de sapeurs qui creusent, d'ouvrières qui ourlent, de bassins qui se vident ou se remplissent, ou les deux à la fois. Bien entendu, les robinets, les maçons, les marchands de vin, les sapeurs, les ouvrières et les bassins comptent fort peu dans l'affaire. Ce que les Modernes, auxquels je faisais allusion plus haut, ont fini par ne plus comprendre. Je cite Récanati[20] :

(...) d'un côté, pour accéder à la chose représentée, on doit recourir au signe, à la chose représentante, car nous connaissons la chose représentée par son intermédiaire ; mais d'un autre côté, on doit faire abstraction du signe, de la chose représentante, pour accéder à ce qu'elle représente : on doit faire comme si le signe n'existait pas, on doit le traiter comme rien. Le signe doit être à la fois présent et absent pour représenter la chose signifiée.

Ce paradoxe est très sensible dans toute la littérature classique : c'est le paradoxe de la présence-absence du signe. Il faut que le signe soit présent (pour représenter la chose signifiée) ; mais s'il est trop présent, il finit par cacher la chose qu'il est censé dévoiler. Pour accéder à la chose signifiée, on doit certes passer par le signe, mais on ne doit surtout pas s'y arrêter. Quand le doigt montre la lune, il ne faut pas, comme l'imbécile selon un proverbe connu, regarder le doigt.

Les Modernes, à cet égard, sont donc des imbéciles. Mais le problème est secondaire. Poursuivons. Le couple chose représentante-chose représentée se double d'un autre : toute chose représentante - tout signe - peut être considérée soit comme *chose*, soit comme *représentant*. Récanati, à nouveau[21] :

La chose représentante est d'abord une chose, comme toutes les autres choses, mais elle se distingue des autres choses par une qualité supplémentaire : elle est signe, elle représente autre chose qu'elle-même. Tout signe est une chose parmi les choses, mais toute chose n'est pas signe ; le signe est donc doublement déterminé, en premier lieu comme chose, et ensuite, de façon spécifique, comme signe. Chaque fois qu'on est en face d'un signe, on peut le considérer soit comme une chose, sans prêter attention au fait que cette chose en représente une autre, soit comme signe.

Tout, ai-je dit, peut « fonctionner » comme signe, même si tout n'est pas signe. Mais le vrai problème est ailleurs. Ouvrant le chapitre où ils traitent *Des idées des choses, & des idées des signes*, les auteurs de la *Logique de Port-Royal* indiquent[22] :

19. J'emprunte ici, s'agissant de la théorie classique des signes, au beau livre de François Récanati, *La transparence et l'énonciation*, Editions du Seuil, Paris, 1979.
20. *Op. cit.*, p.17.
21. *Ibid.*, p.32.
22. Arnaud et Nicole, *La logique ou l'art de penser* (1683), Flammarion, Paris, 1970, p.80.

Quand on considère un objet en lui-même et dans son propre être sans porter la vue de l'esprit à ce qu'il peut représenter, l'idée qu'on en a est une idée de chose, comme l'idée de la terre, du soleil. Mais quand on ne regarde un certain objet que comme en représentant un autre, l'idée qu'on en a est une idée de signe, et ce premier objet s'appelle signe. C'est ainsi qu'on regarde d'ordinaire les cartes et les tableaux.

Je souligne : « C'est ainsi qu'on regarde d'ordinaire les cartes et les tableaux ». Et j'ajoute : c'est ainsi que la Culture nous pousse à regarder, « spontanément », tout objet de nature graphique. Devant une chaise, ou un marteau, ou quelque objet inconnu de nous, nous ne songeons pas à demander ce que cela représente. Un tel objet, pour nous, *est* - tout simplement. Nous le regardons comme une chose. Tout change avec la chose écrite, ou dessinée. Voici alors que la Culture nous livre sans partage à *l'obsession représentationaliste*. Devant tel objet inconnu, nous demanderons ce que c'est, ou à quoi ça sert, ou comment on s'en sert. Tandis que nous tiendrons spontanément que - par exemple - l'écriture

$$2x^3 - 5 = 0$$

doit bien *représenter* quelque chose - quelque *autre* chose.

Or c'est ici, précisément, que la Culture commence de ne plus comprendre. Car pour le mathématicien, cette écriture n'est qu'accidentellement un signe : elle n'est un signe - une chose représentante - qu'autant que tout objet peut fonctionner comme signe. Elle est d'abord une *chose*, face à laquelle on devra se demander d'abord *ce que c'est, à quoi ça sert, comment on s'en sert.*

Voici par exemple comment je peux être amené à me servir du polynôme $2x^3 - 5$. Je me demande si le nombre positif

$$\sqrt[3]{5/2}$$

est un nombre rationnel ou irrationnel. Cela me conduit à former une équation dont ce nombre soit solution, soit précisément :

$$2x^3 - 5 = 0.$$

Je sais (cela découle d'un théorème général) que toute solution *rationnelle* positive de cette équation, mise sous forme d'une fraction irréductible p/q (avec p et q positifs), est telle que p divise le terme constant, soit -5, et q divise le coefficient directeur, soit 2. On a donc p = 1 ou 5, et q = 1 ou 2. Les seules solutions rationnelles possibles sont donc a priori 1, 5, 1/2 et 5/2. Je vérifie qu'aucun de ces nombres rationnels n'est solution de l'équation (par exemple, pour x = 1, l'expression $2x^3 - 5$ vaut 2 - 5 = -3). J'en déduis que le nombre examiné, qui, « par construction », est une solution de l'équation, n'est pas rationnel.

La distance ne saurait être plus grande entre ce que fait le mathématicien au travail et ce que la Culture en perçoit. Pour le mathématicien, l'objet *formel* qu'il manipule - tel polynôme par exemple - est une *chose*, et qui existe par elle-même ; une chose qui a, si je puis dire, une éminente dignité ontologique. Pour la Culture, cette chose n'est que

« chose représentante », et seulement au second degré ! Représentant de représentant, tenant lieu de tenant lieu, ou, pour parler un langage plus moderne, signifiant de signifiant. La grande affaire, dès lors, sera de mettre la main sur le « signifié » - l'introuvable signifié.

VI. La tentation sémiologique

Parler de signifiant et de signifié, c'est, en apparence du moins, entrer dans l'ère de la modernité. J'ai nommé jusqu'ici un personnage que je n'ai pas pris le soin de présenter : la Culture. J'introduis maintenant un autre personnage, dont il me faudra dire quelques mots : *la Noosphère*.

La noosphère c'est, proprement, la sphère de la pensée (l'emprunt se fait ici à Teilhard de Chardin). Plus restrictivement, je désigne par Noosphère, non sans quelque ironie, la sphère des gens *qui pensent sur l'enseignement*. Par exemple sur l'enseignement des mathématiques : et on parlera alors, plus précisément, de la noosphère de l'enseignement des mathématiques. La Noosphère, donc, inclut tous ceux - enseignants, syndicalistes, pédagogues, responsables, didacticiens même - qui consacrent un tant soit peu de leur temps, ou qui consacrent parfois l'essentiel de leur temps, à réfléchir sur des questions d'enseignement.

Mais ce qu'il me faut noter surtout, c'est que la Noosphère est une institution *culturellement dominée*, qui tend à accueillir passivement, de manière acritique, les apports d'institutions extérieures, dans l'ordre des savoirs comme dans l'ordre des pratiques. La Noosphère, à tous égards, vit en province, et cherche à l'oublier en suivant le dernier cri de la mode.

Donc la Noosphère, qui, avec la Culture, pense sous l'empire de la théorie classique du signe, découvre avec retard, et sans bien le comprendre, le saussurianisme : je reviens à mon sujet. Elle apprend le *signifiant* et le *signifié*, la *syntaxe* et la *sémantique*, et deux ou trois autres choses encore.

La théorie saussurienne du signe s'éloigne pourtant autant qu'on peut le faire de la théorie classique. Elle est, notamment, beaucoup moins libérale. Dès 1966, Emile Benvéniste croit bon d'en avertir les philosophes, auxquels il adresse cette mise en garde soupçonneuse[23] :

Il faut d'abord comprendre tout ce qu'implique (...) la notion saussurienne du signe. On ne peut assez s'étonner de voir tant d'auteurs manipuler innocemment ce terme de « signe » sans discerner ce qu'il recèle de contrainte pour qui l'adopte et à quoi il l'engage désormais.

Que se passe-t-il ? Même s'il la situe - dans l'Introduction du *Cours* - dans le cadre d'ensemble d'une possible *sémiologie*, elle-même définie comme la science qui étudie la vie des signes au sein de la vie sociale, Saussure resserre son analyse autour du signe linguistique et, plus étroitement encore, on l'aura compris, autour du *signe*

23. Emile Benveniste, *Problèmes de linguistique générale*, II, Gallimard, Paris, 1974, p.219.

verbal. Mais qu'est-ce que le signe saussurien ? C'est l'union, qui ne saurait être rompue, d'une *image acoustique* et d'un *concept.* Le choix terminologique est ici essentiel. Ecoutons, sur ce chapitre, Roland Barthes, dans ses *Eléments de sémiologie*(24) :

Pour désigner la relation signifiante, Saussure a tout de suite éliminé *symbole* (parce que le terme comportait une idée de motivation) au profit de *signe*, défini comme l'union d'un signifiant et d'un signifié (à la façon du recto et du verso d'une feuille de papier), ou encore d'une image acoustique et d'un concept. Jusqu'à ce que Saussure trouvât les mots de *signifiant* et de *signifié*, signe est pourtant resté ambigu car il avait tendance à se confondre avec le seul signifiant, ce que Saussure voulait éviter à tout prix ; après avoir hésité entre *sôme* et *sème*, *forme* et *idée*, *image* et *concept*, Saussure s'est arrêté sur *signifiant* et *signifié*, dont l'union forme le signe ; proposition capitale et à laquelle il faut toujours revenir car on a tendance à prendre *signe* pour signifiant, alors qu'il s'agit d'une réalité bi-face (...).

Cette union n'existait pas avant Saussure. Ainsi Michel Bréal, à la fin du XIXe siècle, avait-il introduit le terme de *sémantique* pour désigner la science des significations, par opposition à la phonétique, ou science des sons (son *Essai de sémantique, science des signfications* est de 1897). Mais, par son succès même, et avec l'extension presqu'indéfinie de son domaine d'application, le modèle saussurien conduit, en dépit des rappels à l'ordre dont nous avons vu Barthes donner l'exemple, à des usages beaucoup plus relâchés.

La sémiologie, soigneusement construite et où, face à l'irritation de certains linguistes, tel André Martinet, pour qui tout n'est pas langue, on multiplie prudemment les différenciations internes - il y a par exemple le « simple » *code*, puis le *système de signes*, puis, enfin, le *langage verbal*(25) -, la sémiologie se diffuse pour donner ça et là une sémiologie spontanée qui, bientôt, prend pied au sein même de la Noosphère. Nous y revoilà.

Paradoxalement, de la triade saussurienne - signe, signifiant, signifié -, *c'est le premier terme qui se perd.* On parlera couramment de signifiant et de signifié, non de signe. C'est que, oubliant la leçon, on retourne au passé : le signifiant, d'allure plus technique, plus chic, prend simplement la place du signe, qui sent son béotien.

Bientôt la boucle est bouclée ; on revient au point de départ. L'analyse classique est en sous-main reconduite. La chose représentante, simplement, fait place au signifiant - qui a pris du galon depuis le temps où il était, chez Saussure, simple « image acoustique ». La chose représentée devient signifié, concept. Dès lors, derrière tout signifiant - en ce sens élargi -, on cherche furieusement le signifié, le concept. La Noosphère se mue en spécialiste du concept : la grande affaire, didactiquement, est de *construire le concept.*

Avec cela, pourtant, rien n'a changé. La Culture retrouve ses droits. Les signifiants sont un mal nécessaire, et point trop n'en faut ! Les concepts seuls comptent

24. Reproduit *in* Roland Barthes, *L'aventure sémiologique*, Editions du Seuil, Paris, 1985, p.38.
25. Voir par exemple Ducrot et Todorov, *op. cit.*, pp.136-137.

véritablement. Sous la terminologie moderne, on vous ressert les antiques péjorations. Le logocentrisme, increvable métaphysique occidentale, refleurit.

Un seul exemple. Soit l'opposition syntaxe/sémantique. La syntaxe est du côté du formel, froid et mécanique ; la sémantique, du côté du sens, chaleureux et divers. Soit maintenant à résoudre l'équation $2x + 1 = 0$. Je trouve, dans un ouvrage publié récemment, l'opposition suivante - où la référence est à Umberto Eco :

Elaboration syntaxique	*Elaboration sémantique*
$2x + 1 = 5$ $2x = 4$ $x = 4/2 = 2.$	Je dois trouver un nombre dont le double plus une unité me donne cinq. Par conséquent ce nombre est plus petit que cinq. J'essaie la suite 1, 2, 3, 4 et je vois que 2 est la solution.

Exemple extrême sans doute, qui choquera le linguiste moyen : le « sémantique », bien entendu, surgit ici du côté du *discours* (oral, mis par écrit), en quoi l'on reconnaît toujours le raisonnement. Le calcul est pure syntaxe. CQFD.

VII. Quand dire c'est faire : les outils sémiotiques

Voilà donc ce qui attend quiconque se pose la question de la nature de l'activité mathématique : formidable barrage métaphysique, renforcé aujourd'hui d'emprunts à la linguistique. Il est pourtant curieux de prétendre penser l'activité du mathématicien, ou quelque autre pratique humaine, en termes de langage - et de cela seulement. Le ferait-on s'agissant du maçon, du marchand de vin, de l'ouvrière ou du sapeur ? Il reste donc à reprendre la question. C'est ce que je vais tenter d'esquisser maintenant, en allant au plus court.

J'observerai, en premier lieu, que tous les exemples que nous avons vus plus haut - énoncés et solutions - s'inscrivent en faux contre le plus ferme des dogmes issus du saussurianisme : le caractère de *système fermé* qu'auraient les systèmes étudiés par la sémiologie (et, en tout premier lieu, le langage).

C'est au fond cela qui choque Alain : dans le « raisonnement arithmétique », si on peut le nommer ainsi, le *discours* se troue d'appels au *calcul* sur des nombres, voire à un calcul dont la complexité requiert qu'il s'accomplisse *par écrit*. Saussure, quand il fait du langage une hypostase théorique, reprend à cet égard l'esthétique culturelle la plus commune. J'ajoute ici que je ne connais aucune linguistique - la philosophie du langage ordinaire ne fait pas, sur ce point, exception - qui ne sépare radicalement la langue d'un « reste » extralinguistique, auquel il s'agira, éventuellement, d'expliquer ensuite comme elle peut s'articuler.

Or ce dogme est aussi le plus contraire à la leçon du concret. Regardons le mathématicien au travail : il parle (même seul), écrit, dessine, fait des gestes. Eloignons-nous du soleil aveuglant du langage et de ses satellites sémiologiques. Notre mathématicien *travaille*. Il manipule ce que j'appellerai provisoirement des *outils*

- les outils du travail mathématique -, et cela de manière réglée, au sein d'un système *local*, souvent évolutif, parfois même labile. Je nomme un tel système un *système de travail*.

De quoi est fait ce système ? La réponse supposerait de longs préliminaires théoriques[26]. J'abrège, m'autorisant de la méthode axiomatique chère à la culture mathématique. Je dirai donc que ce système est fait d'*objets*, liés entre eux par ce que je nomme des *interrelations*, objets à chacun desquels notre mathématicien - notre *sujet* - se relie par son *rapport personnel* au dit objet. Ces rapports naissent, précisément, de la *pratique* qui réunit et fait vivre ensemble objets et sujet, au sein du système de travail considéré.

Cela dit, une dichotomie doit être introduite dans l'ensemble des objets dont se prévaut le mathématicien. Lui vous dira par exemple que l'outil essentiel, pour accomplir telle tâche mathématique (par exemple résoudre l'équation $2^x = 10$), est la fonction logarithme. La fonction logarithme est donc un objet, auquel notre mathématicien a un certain rapport personnel. Mais jamais il ne pourra vous *montrer* un tel objet. Il pourra prononcer son nom - « fonction logarithme » -, tracer son graphe (comme on le fait faire aux élèves des lycées), écrire telle ou telle formule - par exemple $x = \ln 10/\ln 2$ - dans laquelle apparaisse la notation, ln, par laquelle les mathématiciens la désigne. Mais jamais vous n'aurez l'objet « Fonction logarithme » présent devant vous.

D'un côté, il y a ainsi des objets que je nomme *ostensifs*, tels un nom, une notation, un graphe, ou encore un schéma gestuel, qui peuvent être *réellement présents* et que l'on peut *effectivement manipuler* dans leur matérialité. D'un autre côté, il y a les objets *non ostensifs*, que je nomme aussi *émergents*, et que l'on peut seulement *évoquer* à l'aide d'objets ostensifs. Lorsque le mathématicien dit qu'il manipule la fonction logarithme, c'est en vérité certains des objets ostensifs associés qu'il manipule.

Bien entendu objets ostensifs et non ostensifs viennent à l'existence et vivent *ensemble* au sein de la pratique mathématique qui les réunit : ils se déterminent réciproquement. Je ne peux « manipuler » la fonction logarithme qu'à travers certains objets ostensifs associés ; mais, inversement, je ne peux manipuler ces objets ostensifs comme je le fais quand je prétends manipuler la fonction logarithme si n'existe pas pour moi l'objet « Fonction logarithme », tout de même que je ne peux manipuler ce stylo - objet ostensif - *comme un stylo* si n'existe pas pour moi l'objet - non ostensif - « Stylo ».

Le chemin dans lequel on s'engage alors conduit à étudier, notamment, les problèmes de la genèse, de la vie et de la mort des objets - de leur *écologie* - à travers la dialectique de l'ostensif et du non ostensif. Mais je laisserai ce point de côté, pour me concentrer sur les objets ostensifs, afin d'y voir apparaître une autre dialectique, qui vous rappellera quelque chose de la théorie classique du signe.

---

26. Voir par exemple Yves Chevallard, Concepts fondamentaux en didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en didactique des mathématiques*, 12/1, 1992, pp.73-112.

Considérons le problème suivant.

Enoncé

Hier j'ai acheté 3 cahiers pour 10,50. Je dois aujourd'hui en acheter 5 autres. Combien devrai-je payer ?

La résolution de ce problème suppose un travail qui s'appuiera ici sur certains outils mathématiques articulés en un système de travail qui, aussi curieux que cela paraisse, n'a pas eu jusqu'à présent l'heur de vivre dans nos classes (de collège ou de lycée). Voici.

Solution

On a : f(3) = 10,5, avec f linéaire. Il vient :
f(5) = 5f(1) = 5/3.3.f(1) = 5/3.f(3) = 5/3.10,5 = (5 x10,5)/3 = 17,5.

Bien entendu, pour faire cela, il faut savoir manipuler cet outil qu'est la *notation fonctionnelle*, et il faut savoir aussi que l'assertion *f linéaire* signifie que l'on a f(la) = lf(a), pour tout l et tout a, formulation qui, aussi obscure soit-elle au non mathématicien, m'indique comment on peut se servir, lorsque f est linéaire, de la notation fonctionnelle.

Cela noté, l'essentiel tient alors dans le fait suivant : lorsque je me sers, comme on le fait dans la solution proposée, de la notation fonctionnelle, les objets ostensifs manipulés me permettent de *faire un certain travail* (par exemple, ici, de déterminer la valeur cherchée, soit 17,5) et, dans le même temps, *de voir ce que je fais*, et donc *de le faire*. Pris dans une certaine pratique, les objets ostensifs manipulés apparaissent ainsi clivés, dans leur matérialité, en ce que je nomme une *valence instrumentale* et une *valence sémiotique*. Je les nomme pour cela *instruments sémiotiques*.

La valence instrumentale de l'instrument sémiotique me permet de *faire* ; sa valence sémiotique permet de *voir ce qui est fait* - à moi, et à ceux qui m'observent. Il y a plus. Lorsque, comme ici, les objets ostensifs manipulés figurent dans le registre de la scription ou de la trace, on peut voir, non seulement ce qui est *en train* de se faire, mais aussi *ce qui a été fait*. Leur tracé fonctionne comme *mémoire* du travail accompli, et me suggère *ce qu'il reste à faire*. C'est là le grand progrès de l'outillage mathématique que réalise la révolution algébrique, à la fin du XVI^{e} siècle en Europe.

Ecoutons Descartes expliquer, dans la seizième de ses *Règles pour la direction de l'esprit* (couchées sur le papier vers 1627-1628, quelque dix ans avant le *Discours*), ce grand progrès de la technologie mathématique[(27)] :

Mais, parce qu'elle [la mémoire] est souvent fugitive et pour ne pas nous forcer à dépenser une partie de notre attention à la raviver, pendant que nous sommes occupés à d'autres pensées, l'art a découvert très à propos l'usage de l'écriture. Forts du secours de celle-ci, nous ne confierons ici absolument rien à la mémoire, mais, laissant notre fantaisie libre et tout entière aux idées présentes, nous représenterons sur du papier tout ce qu'il faudra retenir. Et cela au moyen des notations les plus brèves (...).

27. Descartes, *Règles pour la direction de l'esprit*, traduction et notes de J. Sirven, Vrin, Paris, 1974, pp. 128-129.

Par exemple, si j'écris 2a , ce sera comme si je disais : le double de la grandeur représentée par la lettre a et qui contient trois relations. Par cette industrie, non seulement nous ferons l'économie de beaucoup de mots, mais, ce qui est le principal, nous présenterons les termes de la difficulté sous une forme si pure et si nue que, sans omettre rien d'utile, on ne trouve pourtant jamais en eux rien de superflu et qui occupe inutilement la capacité de l'esprit, tandis que notre intelligence devra embrasser plusieurs objets à la fois.

Avant cela, en effet, l'instrument sémiotique essentiel du mathématicien, à côté du *chiffre*, qui s'écrit, c'est le *mot*, qui se dit. Tous les prétendus raisonnements de l'arithmétique traditionnelle, par exemple, sont des *petits discours*, que l'on apprend *par coeur*, à titre de *règles* (par opposition aux *formules* qu'apporte l'algèbre), et que l'on doit dire tout d'une traite, sous peine de devoir les reprendre du début. Rappelez-vous la fameuse règle de trois, dans sa version la plus simple, dite *méthode de réduction à l'unité* :

Solution
Si 3 cahiers coûtent 10,5 francs, 1 cahier coûtera 3 fois moins, soit 10,5 : 3 francs, et 5 cahiers coûteront 5 fois plus, soit 5x(10,5:3) = ...

Semblablement, la solution arithmétique au problème des pièces, qui procède de la règle dite de *fausse position* (on pose au départ une fausse valeur de l'inconnue), est apprise par coeur sur un exemple paradigmatique. Résoudre le problème consiste alors à prononcer le discours appris par coeur en y insérant adéquatement les valeurs numériques fournies par l'énoncé. Technique primitive, seule longtemps disponible, en laquelle la Culture, dupe du logocentrisme, voit affleurer la Raison !

Ce qu'il faut bien comprendre ici, c'est que l'usage des mots dans l'activité mathématique ne peut se comprendre à partir seulement de l'idée de signe, mais à partir de l'idée englobante d'outil, ou d'instrument, sémiotique. Au lieu de tenter de penser le formalisme mathématique comme langue (formelle), il faut à l'inverse, penser la langue (verbale) comme participant de la panoplie d'instruments sémiotiques du travail mathématique.

Faute, souvent, de disposer d'autres types d'instruments sémiotiques, on travaille avec des mots. Voici par exemple un auteur, Francés Pellos, qui publie à Nice, en 1492, il y a tout juste cinq cents ans, une arithmétique comme on en connait beaucoup depuis le XV^{e} siècle. Lui a écrit en occitan son *Compendion de l'abaco*. Je l'ouvre presque au hasard. Lisons[28] :

Si tu voles trobar un numbre en che entierament puscas trobar un miech, un ters, un quart, un sesen, un uten, digas ensins : 2 es contengut en 4, et 3 en 6, et 4 en 8. Impero laysas anar 2, 3 et 4. E pren solament 6 et 8, et multiplica ellos dos ensemble, disent ensins : 6 vegads 8, son 48, et en 48 tu trobaras tos los supradichs rots.

28. Francés Pellos, *Compendion de l'abaco*, texte établi d'après l'édition de 1492 par Robert Lafont, Editions de la Revue des langues romanes, Université de Montpellier, Faculté des Lettres et Sciences humaines, Montpellier, 1967, p.61.

Digas ensins - dis ainsi. Ici, véritablement, *dire c'est faire*. Et j'ajoute, à l'intention des connaisseurs : en un sens qui dépasse les seuls *performatifs* d'Austin.

Autre exemple, puisé à la même source, et qui illustre cette fois la règle de fausse position[29] :

Item troba un numbre che chi partiria per 7, que venga 3 he un miech. Fay ensins : pausa a ton plaser 14, que partas per 7, ven 2. Impero digas ensins : si 2 venon de 14, de che venon 3 he miech ? Fay coma sabes per la regula de tres, et trobaras 24 he miech. Et aquel es lo numbre che demandas.

Fay ensins, digas ensins, fay coma sabes per la regula de tres - fais ainsi, dis ainsi, fais comme tu le sais par la règle de trois. Le dire est une modalité du faire, une forme du travail mathématique.

VIII. Vers une théorie unitaire

La notion d'instrument sémiotique constitue le point de départ d'une théorie unitaire du travail mathématique. Les mots, les symboles - arithmétiques et algébriques, et ceux de tous les formalismes qu'on voudra -, les gestes même (on en verra un exemple plus loin), articulés en systèmes de travail réglés, sont, tous ensemble, les instruments concrets - ostensifs - du travail mathématique.

Tout système de travail, à cet égard, suppose la combinaison de plusieurs *registres sémiotiques* - oral, écrit, gestuel. Revenons par exemple au problème « de proportionnalité » donné en exemple plus haut - celui où, ayant acheté hier 3 cahiers pour 10,5 francs, je veux aujourd'hui en acheter 5 de plus. J'ai donné d'abord une solution « moderne », qui n'existe pas, et que je devrais donc, à la manière des linguistes avec les mots qu'ils inventent pour les besoins de l'analyse, affecter d'un astéristique. J'ai donné aussi la solution par réduction à l'unité, considérée, dans l'arithmétique des écoles primaires d'autrefois, comme la plus élémentaire. Voici maintenant la solution de l'Age classique, qui ne disparaîtra vraiment qu'au début du XX^{e} siècle.

Le travail, ici, commence par une *mise en discours* de la matière proposée par l'énoncé. Je dis donc :

Trois est à dix virgule cinq comme cinq est à x.

Ce travail *discursif* commande une production écrite, à savoir l'écriture :

$$3 : 10{,}5 :: 5 : x.$$

Ce que j'obtiens est alors ce que les Classiques nomment une *proportion*. Bien entendu, cette écriture peut être *oralisée*. Elle se lit : "Trois est à dix virgule cinq comme cinq est à x" - tout simplement ! Mais l'intérêt de la proportion comme telle,

29. *Op.cit.*, p.181.

c'est qu'elle peut être transformée par un travail que je ne pourrais guère accomplir sur le discours dont elle procède. Il y a en effet tout une *algèbre des proportions*, qu'on apprend longuement à l'école, et qui me permet, si nécessaire, de toiletter, d'apprêter cet instrument de travail que je viens de produire. Par exemple, la proportion obtenue est équivalente à la suivante

$$6 : 21 :: 5 : x$$

laquelle à son tour équivaut à

$$2 : 7 :: 5 : x.$$

Une proportion a une structure. C'est un objet dont on apprend à reconnaître les parties, et les liaisons entre parties. Il y a par exemple les (termes) *extrêmes*, qui sont ici 2 et x, et les (termes) *moyens*, ici 7 et 5. A ce stade, je peux tirer x à l'aide d'une règle fort simple : x, qui est ici un extrême, est égal au produit des moyens, soit 35, divisé par l'autre extrême ; soit : $x = 35/2 = 17{,}5$.

Les instruments sémiotiques essentiels sont ici le schéma discursif

... est à ... comme ... est à ...

ainsi que l'écriture

- : - :: - : -

Dans la méthode de réduction à l'unité, l'outil sémiotique essentiel, permettant le travail discursif requis, était constitué du couple

... fois moins / ... fois plus.

Et, bien entendu, les deux solutions présentées plus haut s'agissant de la résolution de l'équation $2x + 1 = 5$, se distinguent, non par une supposée opposition générale entre syntaxe et sémantique, mais, plus concrètement, par la nature des outillages sémiotiques mis en jeu, qui permettent de produire la réponse attendue ($x = 2$) par des procédés de travail *entièrement différents*.

Nous sommes ici, très évidemment, fort loin des idéalités mathématiques et du conceptualisme idéaliste chers à la Noosphère - laquelle, parce qu'elle la championne de l'hypostasiation, se demandera emphatiquement si l'élève « possède », ou « a construit » le *concept* de proportionnalité.

L'attention aux instruments sémiotiques du travail mathématique permet, à cet égard, de renouveler l'analyse didactique. Elle conduit par exemple à mettre en doute le type d'argument qui fleurit depuis vingt ans, dans la Noosphère et dans les instructions et programmes officiels, autour des instruments formels du travail mathématique. Ainsi demande-t-on aux professeurs de proscrire l'usage du signe d'équivalence (la double flèche, I), au motif que le « concept » d'équivalence est fort difficile, et qu'à employer ce petit signe, les élèves agiraient *sans comprendre ce qu'ils font*. Autrement dit : le concept d'abord, « l'expression formelle » du concept, ensuite ! Or, précisément, c'est - à rebours - en engageant cet instrument sémiotique qu'est le signe d'équivalence dans une pratique mathématique concrète que les élèves auront chance d'en voir se dégager les règles correctes d'emploi, faisant ainsi qu'émerge pour eux l'objet « Equivalence » - qu'il est loisible à qui le veut de nommer concept...

Ce genre de paralogisme a son prix. Dans nos classes de mathématiques, les outils formels du travail mathématique se raréfient, et ceux qui demeurent conservent leur charge d'indignité, face à l'arrogance culturelle du raisonnement. Mais en cela on perd sur tous les tableaux : l'outillage discursif (verbal), lui-même, s'appauvrit. Ainsi ne peut-on plus guère employer aujourd'hui - comme on le fit pendant des siècles - le terme générique, bien utile parfois, de *quantité*. Simple exemple.

La purification des outils discursifs, dont la Réforme des mathématiques modernes fit sa grande ambition, diminue la fonctionnalité de l'outillage verbal, ne serait-ce qu'en donnant la chasse à tout ce qui pourrait ressembler à de la polysémie. Dans le film de Louis Malle, *Au revoir, les enfants*, une scène se déroule dans la classe de mathématiques. J'ai reconstitué la figure, et je reproduis le passage correspondant du scénario[30] :

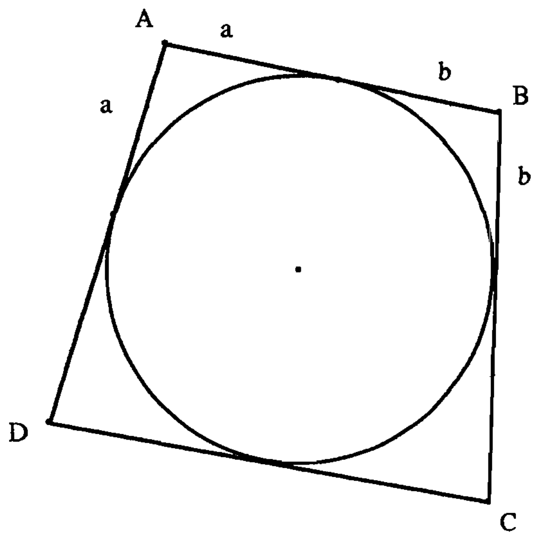

Figure 2

M. GUIBOURG *(sans se retourner)* : Et ne vous croyez pas obligé de faire le pitre...

Qui peut me montrer que dans ce quadrilatère la somme des deux côtés opposés AB plus CD est égale à la somme des deux autres BC plus DA ?

Plusieurs mains se lèvent, dont celle de Bonnet.

M. GUIBOURG : Vous, le nouveau.

CIRON : Il s'appelle Dubonnet, monsieur.

BONNET : Ça va. On a compris.

Bonnet va au tableau noir. Un élève avance le pied et le fait trébucher. Rires.

30. Louis Malle, *Au revoir les enfants*, scénario, Gallimard, Paris, 1987, pp.36-37.

BONNET : On sait que les tangentes à un cercle issues d'un point sont égales. Donc *a* égale *a*, *b* égale *b*.

Et il résout le problème avec aisance.

Vous observerez au passage le rôle de la *deixis* gestuelle dans la solution indiquée : s'il ne s'articulait pas avec le doigt qui, dans le même temps, montre certains éléments de la figure tracée au tableau, le discours de l'élève - d'apparence purement tautologique : *a* égale *a*, *b* égale *b* - serait bien incapable de produire aucune solution ! Et Bonnet n'aurait pu résoudre le problème ainsi s'il était resté à sa place.

Mais il y a plus. Ce discours lui-même ne pourrait aujourd'hui être produit dans cette forme-là - avec cette *aisance* là. Car Bonnet aujourd'hui ne pourrait se prévaloir de ce que les « tangentes à un cercle issues d'un point sont égales ». Les *tangentes*, en effet, lui objecterait un M. Guibourg d'aujourd'hui, sont des *droites*, non des *segments* - ce dont l'élève parle véritablement. Il devrait donc, d'abord, nommer, à l'aide de lettres, les points de contact des tangentes, pour pouvoir alors se référer aux segments de manière « correcte »...

J'ajoute une dernière remarque. Le travail mathématique suppose un travail que je dirai, sinon métamathématique, du moins *épimathématique*. Travail sur les instruments du travail, et sur leur emploi ; travail au second degré en quelque sorte, qui fait partie du travail mathématique. C'est là sans doute que la perte est aujourd'hui la plus sensible. Terrible logique du logocentrisme : l'indignité culturelle de la plupart des instruments ostensifs modernes n'appelle ni la réflexion, ni le commentaire.

Je terminerai donc par un exemple, qui, par contraste, nous fera sentir la fraîcheur des commencements. Dans sa correspondance avec la princesse Elisabeth, Descartes explicite certaines stratégies d'emploi de l'outil algébrique, dont la mise au point lui revient largement. Elisabeth s'est attaquée aux problèmes des trois cercles : trois cercles étant donnés, trouver le quatrième qui touche les trois. Dans sa solution, elle ne fait intervenir qu'une inconnue, là où Descartes en introduit plusieurs. Il s'explique[(31)] :

J'observe toujours, en cherchant une question de Géométrie, que les lignes, dont je me sers pour la trouver, soient parallèles, ou s'entrecoupent à angles droits, le plus qu'il est possible ; et je ne considère point d'autres théorèmes, sinon que les côtés des triangles semblables ont semblable proportion entre eux, et que, dans les triangles rectangles, le carré de la base est égal aux deux carrés des côtés. Et je ne crains point de supposer plusieurs quantités inconnues, pour réduire la question à tels termes, qu'elle ne dépende que de ces deux théorèmes ; au contraire, j'aime mieux en supposer plus que moins. Car, par ce moyen, je vois plus clairement ce que je fais, et en les démêlant je trouve mieux les plus courts chemins, et m'exempte de multiplications superflues ; au lieu que, si l'on tire d'autres lignes, et qu'on se serve d'autres théorèmes, bien qu'il puisse arriver, par hasard, que le chemin qu'on trouvera soit plus court que le mien, toutefois il arrive quasi toujours le contraire. Et on ne voit point si bien ce qu'on fait, si ce n'est qu'on ait la démonstration du théorème dont on

---

31. Lettre de novembre 1643, *in* Descartes, *Correspondance avec Elisabeth et autres lettres*, Garnier-Flammarion, Paris, 1989, pp.79-80.

se sert fort présente à l'esprit ; et en ce cas on trouve, quasi toujours qu'il dépend de la considération de quelques triangles, qui sont ou rectangles, ou semblables entre eux, et ainsi on retombe dans le chemin que je tiens.

Descartes expose alors sa solution. Il en arrive à la résolution d'un système d'équations. Voici donc le « mécanicien » Descartes expliquant son travail sur les petites lettres[32] :

> ... j'ai les trois équations suivantes :
>
> aa + 2 ax + xx = dd - 2 dz + zz + yy
> bb + 2 bx + xx = ee - 2 ey + yy + zz
> cc + 2 cx + xx = ff + 2 fz + zz + yy

et je vois que, par l'une d'elles toute seule, je ne puis trouver aucune des quantités inconnues, sans en tirer la racine carrée, ce qui embarrasserait trop la question. C'est pourquoi je viens au second moyen, qui est de joindre deux équations ensemble, et j'aperçois incontinent que, les termes xx, yy et zz étant semblables en toutes trois, si j'en ôte une d'une autre, laquelle je voudrai, ils s'effaceront, et ainsi je n'aurai plus de termes inconnus que x, y et z tous simples. Je vois aussi que, si j'ôte la seconde de la première ou de la troisième, j'aurai tous ces trois termes x, y et z ; mais que, si j'ôte la première de la troisième, je n'aurai que x et z. Je choisis donc ce dernier chemin, et je trouve...

Tout cela, bien sûr, n'est rien d'autre que le travail que chacun - chaque élève - doit apprendre à faire. Descartes le faisait aussi. Mais lui ne trouvait pas indigne d'en parler. Et de le faire savoir.

32. *Ibid.*, p.82.